III

Lógica proposicional

1. Razonamientos proposicionales

Consideremos los siguientes razonamientos deductivos:

Si la historia ha llegado a su fin, entonces la humanidad está condenada a repetirse. Efectivamente, la historia ha llegado a su fin. Por lo tanto, la humanidad está condenada a repetirse.

Si las variables económicas permanecen estables, entonces hay reactivación y crecimiento. Las cifras indican que hay reactivación y crecimiento. En consecuencia, las variables económicas permanecen estables.

"... la lógica descansa, como la geometría, en verdades axiomáticas, y sus teoremas están construidos sobre la doctrina general de los símbolos..."
G. Boole. *El análisis matemático de la lógica.*

Se trata, en ambos casos, de razonamientos deductivos que tienen dos premisas y una conclusión que el lector ya habrá identificado. Sin embargo, no son silogismos categóricos cuya forma pueda abstraerse en términos de "Todo... es..." o "Ningún... es...", etc. En estos razonamientos la conclusión se infiere a partir de la presencia de ciertos términos como "si... entonces..." o "... y ...", etc., que vinculan entre sí diversas proposiciones. Se los llama razonamientos proposicionales y su estudio corresponde a la lógica simbólica, que proporciona técnicas para decidir acerca de la validez o invalidez de este tipo de razonamientos. Sin embargo, desde ya podemos anticipar que solamente uno de estos razonamientos es válido, mientras que el otro es inválido. ¿Cuál es válido y cuál no lo es?

2. Proposiciones atómicas y moleculares

Las proposiciones se dividen en dos grandes grupos: atómicas y moleculares.

Las atómicas son las mínimas unidades de las que tiene sentido predicar su verdad o falsedad. Así, por ejemplo, "Hoy es domingo" es una proposición atómica. Cada proposición atómica se simboliza mediante las letras "p", "q", "r", "s", llamadas *variables proposicionales*. Las proposiciones moleculares están compuestas por una o más atómicas y su valor de verdad, es decir, el ser verdaderas o falsas, está en función o es función del valor de verdad de las proposiciones atómicas componentes. Por ejemplo, la proposición "Hoy es domingo y hace mucho frío", es una proposición molecular, integrada por dos proposiciones atómicas: "Hoy es domingo" y "Hoy hace mucho frío". La lógica no puede determinar la verdad o la falsedad de las proposiciones atómicas, sólo la experiencia, por ejemplo, observar un termómetro, puede determinar el valor de verdad de la proposición "Hoy hace mucho frío"; pero, en cambio, la proposición molecular será verdadera o falsa según lo sean las atómicas que la componen. En este ejemplo, "Hoy es domingo y hace mucho frío" será verdadera si y sólo si es verdad que "Hoy es domingo" y es verdad que "Hoy hace mucho frío". Bastaría con que una de las dos atómicas fuese falsa para que la proposición molecular en su conjunto fuera falsa. La mayor parte de las proposiciones moleculares está compuesta por dos o más atómicas, pero existe un tipo de proposición molecular, la proposición negativa, que está compuesta por una única proposición atómica. Por ejemplo, "Sandy no es un tigre" es una proposición molecular compuesta de la proposición atómica "Sandy es un tigre". Está claro que el valor de verdad de la proposición molecular está en función del valor de la atómica: la molecular será verdadera cuando la atómica sea falsa y será falsa cuando la atómica sea verdadera.

Todas las proposiciones moleculares que se estudiarán en las próximas páginas poseen esta característica definitoria: su valor de verdad depende del valor de verdad de las atómicas. Esta característica se denomina *extensionalidad* y se dice de las proposiciones moleculares que constituyen "funciones de verdad".

3. Diversas clases de proposiciones moleculares

a) *Conjunciones*. En ocasiones se afirma en una única proposición la unión de dos proposiciones atómicas. Por ejemplo, "Rin Tin Tin es un perro y Siggy es un gato". Este tipo de proposiciones se llama "proposición conjuntiva". La conjunción de dos proposiciones se simboliza " . ". En castellano, la función conjuntiva es cumplida generalmente por "y", "pero", "aunque", etc. Así, la proposición ejemplificada se simboliza "p . q".

Una proposición conjuntiva es verdadera si y sólo si ambos componentes son verdaderos, en cualquier otro caso es falsa.

La siguiente tabla, llamada *tabla de verdad*, expresa gráficamente los casos en que una proposición conjuntiva es verdadera y los casos en que es falsa. Obsérvese que entre dos proposiciones no pueden darse más que cuatro casos: que ambas sean verdaderas, en cuyo caso la conjunción es verdadera: que la primera sea falsa y la segunda verdadera o, la primera verdadera y la segunda falsa o, que las dos sean falsas, en estos últimos tres casos, la conjunción es falsa.

p	q	p.q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

b) *Disyunciones*. La conectiva en las proposiciones disyuntivas es "o". Por ejemplo, "Visitaré Salta o Jujuy". La "o" es ambigua pues puede querer decir "o lo uno, o lo otro o ambos" o por el contrario puede querer decir "o lo uno o lo otro, pero no ambos". La primera se llama disyunción incluyente, la segunda disyunción excluyente. Distinguír entre una y otra no siempre es fácil. En gran medida depende del contexto. Por ejemplo, la proposición "Me serviré postre o café" expresada por alguien que inicia una comida puede ser interpretada en sentido incluyente; en cambio, la proposición "El precio del menú incluye postre o café" al pie de un menú de precio fijo en un restaurante es claramente excluyente.

Una proposición disyuntiva incluyente es falsa si y sólo si ambos componentes son falsos.

Una proposición disyuntiva excluyente es falsa si y sólo si ambos componentes tienen el mismo valor de verdad.

La disyunción incluyente se simboliza "v" y la excluyente "w". Las respectivas tablas son:

p	q	p v q	p w q
V	V	V	F
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	F	F

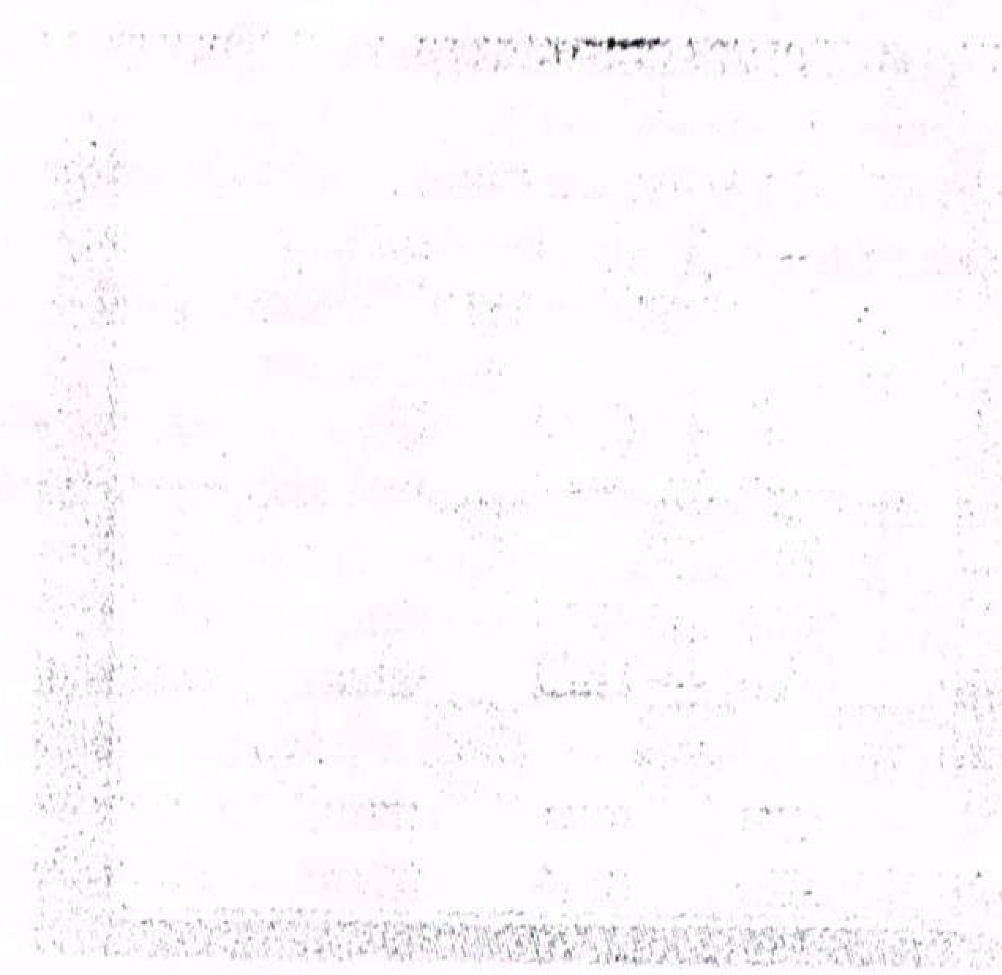
Además de "o", traducen disyunciones, "y/o", "o bien", "o bien... o bien...", "a menos que", "salvo que", etc.

c) *Condicionales*. En estas proposiciones distinguimos un antecedente y un consecuente. El antecedente es condición suficiente para el consecuente. Así, por ejemplo, en la proposición "Si estudia inglés entonces viajará a EE.UU.", la proposición "Estudia inglés", antecedente, es condición suficiente para que se dé el consecuente, "Viajará a EE.UU.". El nexo "Si... entonces..." se simboliza "$\supset$".

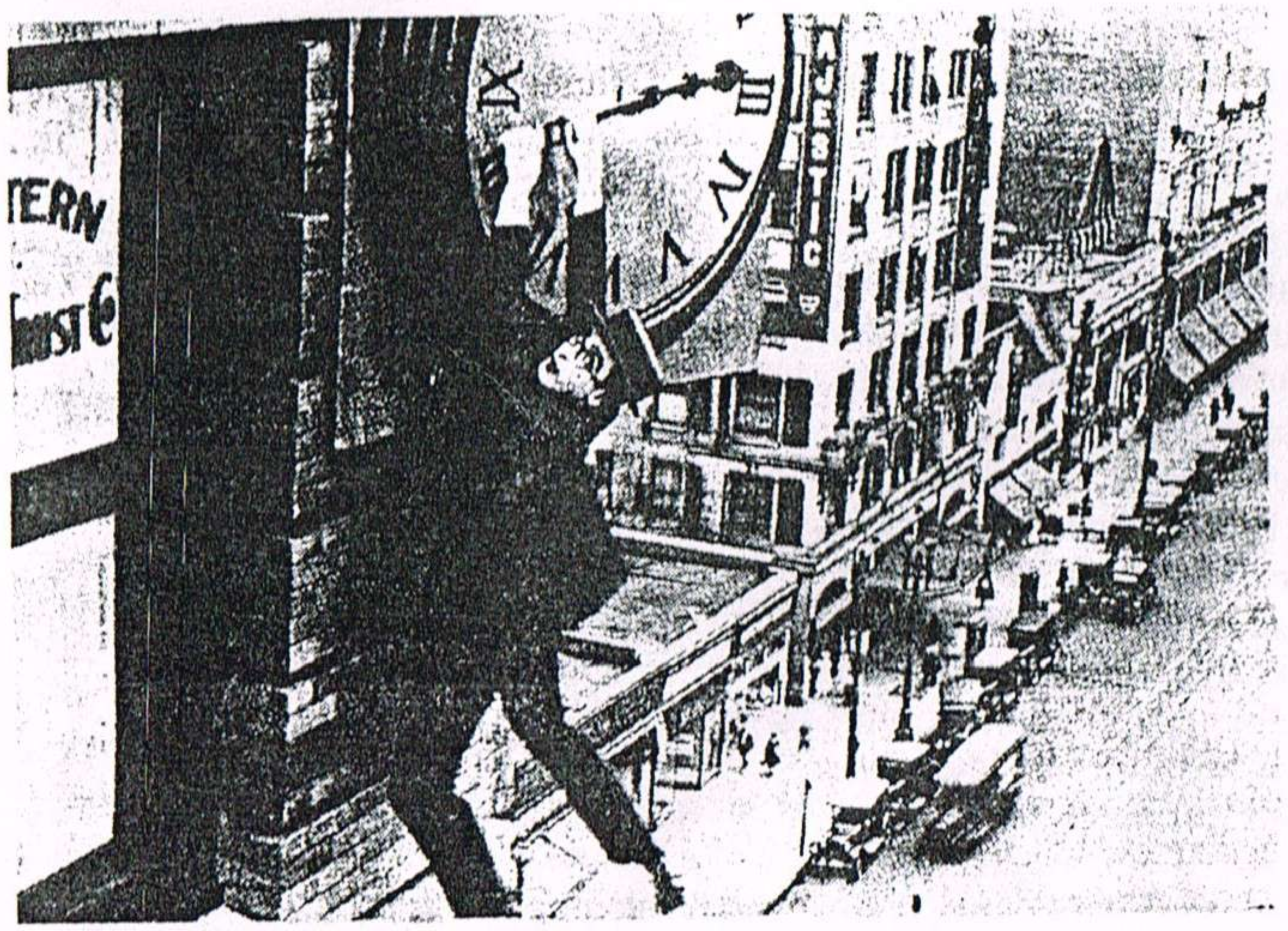
Una proposición condicional es falsa si y sólo si su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. En cualquier otro caso es verdadera. La correspondiente tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \supset q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Las líneas 1 y 3 de esta tabla no ofrecen mayores dificultades. Las líneas 2 y 4, en cambio, pueden sorprender. En realidad, son raros los condicionales con antecedente falso en el lenguaje ordinario, pues carecen de sentido. Las proposiciones condicionales establecen una cierta relación entre el antecedente y el consecuente. El que afirma un condicional, no afirma "p", ni



Mate en dos. Juegan las blancas.
La resolución de este tipo de problemas es una cuestión puramente lógica.



La proposición "si se suelta, se mata" es falsa, si y sólo si, se suelta pero no muere, en cualquier otro caso es verdadera. En la ilustración Harold Lloyd en el film *Safety Last* (El hombre mosca) de 1923.

afirma "q" sólo afirma que "si p entonces q", es decir que no puede ser que se dé "p" y no se dé "q"; es decir que "p" sea verdadero y "q" sea falso. Sólo en este caso, cuando "p" es verdadero y "q" falso, el condicional es falso.

Otras expresiones que tienen la misma función que "Si... entonces..." son "Si..., ...", "... es condición suficiente para...", "Cuando..., ...", "..., si...", etcétera.

d) *Bicondicionales*. Son proposiciones que expresan la equivalencia o mutua implicación entre sus componentes. Por ejemplo: "Ingresa a la facultad si y sólo si aprueba el examen". Esta proposición significa "Si ingresa a la facultad entonces aprueba el examen y si aprueba el examen entonces ingresa a la facultad".

Las proposiciones bicondicionales son verdaderas si y sólo si ambos componentes tienen el mismo valor de verdad. La tabla de verdad del bicondicional es la siguiente:

p	q	p ≡ q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Además de "...si y sólo si...", se simbolizan "≡", las siguientes expresiones: "... cuando y sólo cuando...", "... es equivalente a...", "... es condición necesaria y suficiente para...", etc.

e) *Negaciones*. La negación invierte el valor de una proposición. Dada la proposición "San Martín murió en Argentina", la correspondiente proposición negativa es "San Martín no murió en Argentina". Mientras que el resto de conectivas son diádicas, es decir, se aplican a dos proposiciones atómicas, la negación es una conectiva monádica, pues se aplica a una proposición. El símbolo de la negación es "–".

La negación de una proposición verdadera es falsa y la negación de una proposición falsa es verdadera. La tabla de verdad de la negación es la siguiente:

p	–p
V	F
F	V

Las expresiones que expresan negaciones son "no", "no es cierto que", "no es el caso que", "no es verdad que", etcétera.

4. Simbolización de proposiciones y tablas de verdad

Hasta ahora se han simbolizado proposiciones atómicas y moleculares en las que aparece una sola conectiva: la conjunción, la disyunción, etc. Ahora presentaremos la manera de simbolizar proposiciones moleculares, en general, que combinan más de una conectiva. Así, por ejemplo, la proposición "No fue al cine, pero concurrió al teatro" incluye una negación y una conjunción; la negación afecta a la primera proposición solamente, en este caso. Esta proposición se simboliza "– p . q". Pero si consideramos la proposición "No es cierto que fui al cine y al teatro", se advierte que la negación afecta a la conjunción en su conjunto; esta proposición se simboliza "– (p . q)". Los paréntesis, corchetes y llaves indican el alcance de una conectiva, de modo similar como en matemática determinan el alcance de una operación. Por ejemplo, la proposición "Si estudia mucho y tiene buena suerte entonces aprobará el examen", es una proposición condicional, cuyo antecedente es una conjunción, por lo tanto se simboliza "(p . q) ⊃ r"; sería incorrecto simbolizarla "p . (q ⊃ r)". La proposición "No es verdad que si ensanchan la avenida y pasa la autopista, las casas serán derribadas", es un poco más compleja; obsérvese que lo que "no es verdad" es que "si ensanchan la avenida y pasa la autopista, las casas serán derribadas"; es decir, la negación afecta todo lo que sigue a ella, y lo que sigue a ella es una proposición condicional cuyo antecedente es una conjunción. Esta proposición se simboliza: "– [(p . q) ⊃ r]".

Cuando una proposición atómica se repite, debe repetirse la variable proposicional que la simboliza. Por ejemplo, la proposición "Siggy comió y no comió la carne" se simboliza "p . – p". Por su parte, la proposición "Eduardo fue al cine o no fue al cine", se simboliza "p v – p". La proposición "No es el caso que Pedro estudia y no estudia" es una proposición de la forma "– (p . – p)". Las fórmulas obtenidas se llaman formas proposicionales.

Valiéndonos de las tablas de verdad de las conectivas que conocemos se puede hallar la *tabla de verdad de cualquier forma proposicional*, por complicada que sea. Supongamos una forma proposicional relativamente simple como " – p . q". Hallar su tabla de verdad requiere los siguientes pasos.

1. Se asignan los valores de verdad a los componentes atómicos en la forma que hemos procedido hasta ahora.

– p	q
v	v
f	v
v	f
f	f

Esta asignación agota todas las posibles combinaciones de valores de verdad entre "p" y "q".

2. Se resuelve la tabla de verdad que rige cada conectiva, en primer lugar las de menor alcance, luego las de mayor alcance.

1		2	
–	p	·	q
F	v	$\boxed{F}$	v
V	f	$\boxed{V}$	v
F	v	$\boxed{F}$	f
V	f	$\boxed{F}$	f

En este ejemplo, el signo "–" afecta sólo a "p"; por lo tanto, es lo que primero se ha resuelto (columna 1). Este resultado, con la columna que contiene los valores de "q", da por resultado la columna 2, que es la que contiene el resultado final.

En cambio, si la forma proposicional es "– (p . q)", la tabla de verdad se halla como sigue:

1. Se asignan valores:

– (p	·	q)
v		v
f		v
v		f
f		f

2. Se resuelve la tabla de verdad de cada conectiva, pero en este caso, se empieza por la conjunción (columna 1) y a ese resultado le aplicamos la negación (columna 2); la columna 2 es la que contiene el resultado final:

2		1	
–	(p	·	q)
$\boxed{F}$	v	V	v
$\boxed{V}$	f	F	v
$\boxed{V}$	v	F	f
$\boxed{V}$	f	F	f

Si la forma proposicional presenta tres variables (p, q, r), la asignación de valores, en lugar de tener cuatro hileras, va a tener ocho. Por ejemplo:

	1		2	
(p	·	q)	⊃	r
v	V	v	$\boxed{V}$	v
f	F	v	$\boxed{V}$	v
v	F	f	$\boxed{V}$	v
f	F	f	$\boxed{V}$	v
v	V	v	$\boxed{F}$	f
f	F	v	$\boxed{V}$	f
v	F	f	$\boxed{V}$	f
f	F	f	$\boxed{V}$	f

Esto es así porque son ocho las posibles combinaciones de valores de verdad entre tres proposiciones. En general, la fórmula para hallar el número de hileras que debe tener una tabla de verdad es "2^n", donde "n" es el número de variables proposicionales que aparecen en la forma proposicional. Así, por ejemplo, si "n = 1", el número de hileras es "2"; si "n = 2", el número de hileras es "4"; si "n = 3", el número de hileras "8", etc.

En general, un procedimiento práctico para efectuar la asignación de valores es completar la columna correspondiente a la primera variable alternando un valor "V" y un valor "F"; completar la columna correspondiente a la segunda variable alternando dos valores "V" y dos valores "F", completar la columna correspondiente a la tercera variable alternando cuatro valores "V" y cuatro valores "F". Un poco de práctica en la asignación de valores facilitará la misma.

Si la forma proposicional es "p v – p", su tabla será como sigue:

	2	1	
p	v	–	p
v	$\boxed{V}$	F	v
f	$\boxed{V}$	V	f

Debe observarse que si una variable proposicional se repite como en la forma proposicional precedente, se la cuenta una vez a los efectos de determinar el número de hileras de la fórmula y se le asignan siempre los mismos valores.

En ocasiones, a través de las falacias se manipula a la opinión publica.

Actividades

■ Abstraer la forma lógica de las siguientes proposiciones.

1. Margarita va al cine.
2. Rogelio no es soltero.
3. No es cierto que Laura estudia mucho.
4. David es arquitecto y José Luis es abogado.
5. Raquel y Patricia son primas.
6. Los uruguayos y los argentinos son americanos.
7. José no estudia, pero trabaja.
8. Pablo estudia, sin embargo no trabaja.
9. No es cierto que Pablo haya viajado a San Juan y Mendoza.
10. José no viajó a San Juan y no viajó a Mendoza.
11. Aunque Pedro estudia, no entiende.
12. Alicia se servirá postre o tomará café, pero no ambos.
13. Tomás visitará Salta o Jujuy.
14. Horacio saldrá de viaje a menos que empiece a trabajar.
15. Si va al cine y la película es entretenida, pasará un rato agradable.
16. Hará frío, si sopla viento del sur.
17. Raquel y Patricia son primas o son hermanas.
18. No es cierto que no ha renunciado.
19. Si sale de casa, irá al cine o al teatro.
20. Alicia venderá su casa si y sólo si compra un departamento.
21. No es cierto que si estudia aprueba.
22. Si no estudia, lo aplazan.
23. Que apruebe el examen es condición necesaria y suficiente para que ingrese a la facultad.
24. Llueve y no llueve.
25. Juan fue al cine o no fue al cine.
26. No estudiamos ni nos divertimos.
27. O no estaba en la escena del crimen o no comprendo lo que ocurre.
28. No es cierto que si se modifica la ordenanza municipal habrá que derribar lo construido y modificar los planos.
29. Si viaja a Japón y China, viaja a Japón.
30. La mesa es marrón y de madera si y sólo si la mesa es de madera y marrón.
31. Si Sacachispas desciende, sus simpatizantes exigirán una asamblea y los dirigentes no continuarán en el cargo, entonces se constituirá una nueva comisión directiva y se designará un nuevo director técnico.
32. La democracia se profundiza si y sólo si hay participación popular. Pero si no hay participación popular y la democracia no se profundiza entonces puede haber un retorno al pasado.

■ Interpretar las siguientes formas proposicionales.

1. $(p \cdot q) \supset r$ 2. $p \equiv (q \vee r)$
3. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$ 4. $-[(p \cdot q) \supset r]$
5. $-(p \cdot q) \equiv (-p \vee -q)$ 6. $(p \supset q) \equiv -(p \cdot -q)$

■ Siendo "p", "Delia es profesora de filosofía" y "q", "Juan es profesor de historia", interpretar las siguientes formas proposicionales.

1. $p \cdot q$ 2. $-p \cdot -q$

3. $-p \cdot q$
4. $p \supset -q$
5. $p \cdot -q$
6. $-p \supset q$
7. $-(p \cdot q)$
8. $-(p \supset q)$

5. Tautologías, contradicciones y contingencias

Algunas tablas de verdad dan por resultado final todos valores "V", otras dan por resultado todos valores "F" y un tercer grupo alterna en su resultado final, valores "V" y "F". Se dice que las primeras son formas proposicionales tautológicas, las segundas contradictorias y las terceras contingentes.

Las *tautologías* son formas proposicionales que corresponden a proposiciones lógicamente verdaderas, es decir, verdaderas por su sola forma lógica. Por ejemplo, "$-(p \cdot -p)$" constituye una forma tautológica, al reemplazar "p" por una proposición atómica se obtiene siempre una proposición verdadera: "No es cierto que Juan viajó a Japón y no viajó a Japón", etcétera.

Refiriéndose a las tautologías se ha dicho:

> ...no por ser vacías de contenido las tautologías son inútiles: en muchos casos su verdad formal no es evidente, y se requiere un detenido examen para advertirla. Además, si descubrimos que un enunciado encierra una tautología dejaremos de inmediato de discutir sobre ella, perderemos interés en la averiguación de sus presupuestos empíricos (ya que no los tiene) y —lo que es más importante— podremos utilizarla como puente para razonamientos más complejos. Por esto la lógica trata muy especialmente sobre las tautologías, y por esto empleamos hoy máquinas —las computadoras— que son formidables constructoras de relaciones tautológicas: dados un programa y los datos con que se la alimenta, la máquina produce una respuesta que resulte formalmente verdadera bajo condición de la verdad de aquellas premisas.
>
> *Lógica, proposición y norma*. D. Echave y otros. 1980. Astrea, Bs. As., 1980

Las *contradicciones* son formas proposicionales que corresponden a proposiciones lógicamente falsas, es decir, falsas por su sola forma lógica. Por ejemplo, "$p \cdot -p$" constituye una forma proposicional contradictoria; al reemplazar "p" por una proposición atómica cualquiera se obtiene una proposición falsa: "Llueve y no llueve", etcétera.

Las *contingencias* son formas proposicionales que corresponden a proposiciones lógicamente indeterminadas, es decir, proposiciones que son verdaderas o falsas por razones fácticas, pero no por su sola forma lógica. Por ejemplo "$-p \cdot q$" constituye una forma proposicional contingente; al reemplazar "p" y "q", por sendas proposiciones atómicas se obtienen a veces proposiciones moleculares verdaderas y a veces proposiciones moleculares falsas, por ejemplo, "Sartre no murió en EE.UU., pero Lincoln murió en ese país" (verdadera) o "Córdoba no es una provincia argentina y California es un estado norteamericano" (falsa).

Determinar cuándo una proposición es lógicamente verdadera o lógicamente falsa o ni lo uno ni lo otro es una una de las tareas de la lógica proposicional. Ella provee un método efectivo para lograr esta determinación: las tablas de verdad.

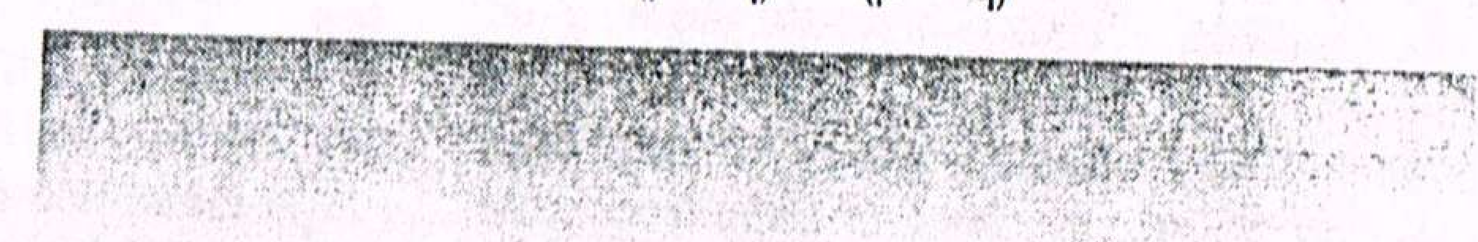
6. Leyes lógicas

Se denomina *ley lógica* a toda forma proposicional tal que al sustituir sus variables por constantes, es decir, las letras proposicionales por proposiciones, el resultado es siempre una proposición verdadera.

Por ejemplo "$--p \equiv p$", es una ley lógica, porque cualquiera que sea la proposición que reemplace a "p", el resultado será una proposición verdadera. Si "p" se reemplaza por "Graciela fue a la manifestación" entonces la proposición que se obtiene es "No es cierto que Graciela no fue a la manifestación si y sólo si fue a la manifestación". En la lógica proposicional, todas las tautologías son leyes lógicas y no hay más leyes lógicas que las tautologías. Pero en la lógica de predicados estudiaremos leyes que no tienen la forma de las tautologías de la lógica proposicional.

Las leyes lógicas son infinitas; por su utilización en el resto de este texto mencionamos las siguientes:

1. Identidad:
   $p \supset p$
2. No contradicción:
   $-(p \cdot -p)$
3. Tercero excluido:
   $p \vee -p$
4. Doble negación:
   $p \equiv --p$ — DN
5. De Morgan:
   $-(p \cdot q) \equiv (-p \vee -q)$ — DeM
   $-(p \vee q) \equiv (-p \cdot -q)$
6. Conmutación:
   $(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$ — Conm.
   $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
7. Asociación:
   $[(p \cdot q) \cdot r] \equiv [p \cdot (q \cdot r)]$ — Asoc.
   $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
8. Distribución:
   $[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$ — Distr.
   $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$
9. Definición del condicional:
   $(p \supset q) \equiv (-p \vee q)$ — Df. condic.
   $(p \supset q) \equiv -(p \cdot -q)$



"No es cierto que llueve o hace frío" es equivalente de "No llueve y no hace frío" de acuerdo con una de las leyes de De Morgan.

10. Transposición: $(p \supset q) \equiv (-q \supset -p)$ Transp.
11. Definición del bicondicional: $(p \equiv q) \equiv [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$ Df. bicondic.
12. Exportación: $[(p \cdot q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$ Exp.
13. Idempotencia: Idemp.
$(p \cdot p) \equiv p$
$(p \vee p) \equiv p$

Las tres primeras de estas leyes son los llamados "principios lógicos". La lógica clásica les asignaba el carácter de axiomas fundamentales del pensamiento. Desde la perspectiva contemporánea no hay una ley lógica más importante que cualquier otra. Es más, las diez leyes siguientes, por constituir bicondicionales tautológicos, son muy utilizadas en los procesos deductivos, ya que permiten sustituir el componente izquierdo por el derecho y recíprocamente, cuando sea conveniente. Estudiaremos esto más adelante.

7. Relaciones lógicas entre proposiciones

Estamos en condiciones de definir ahora con toda precisión una serie de relaciones lógicas que se dan entre las proposiciones: implicación, equivalencia y contradicción.

Al enunciar estas relaciones se utilizan las letras "A", "B", "C", etc., que se denominan variables metalógicas, para indicar que cada una de ellas puede designar una proposición atómica o molecular tan compleja como se quiera.

a) *Implicación*. Una proposición A implica lógicamente a otra B cuando no puede darse que A sea verdadera y B sea falsa. Por ejemplo "No llueve y no hace frío" implica a "No llueve", porque siempre que la primera sea verdadera, también lo será la segunda. Decir que "A implica a B" es lo mismo que decir que "B se deduce lógicamente de A" o que "B se sigue lógicamente de A". Esta relación es de fundamental importancia y constituye quizás una de las aplicaciones más importantes de la lógica a las ciencias, pues estas últimas necesitan contar con métodos seguros de deducción. Se puede verificar que una proposición A implica a otra B mediante el siguiente procedimiento: se construye un condicional de la forma "$A \supset B$" y se realiza la tabla de verdad correspondiente; A implica lógicamente a B si y sólo si el resultado es una tautología. En nuestro ejemplo:

	A			B
(– p	·	– q)	⊃	– p
F	F	F	$\boxed{V}$	F
V	F	F	$\boxed{V}$	V
F	F	V	$\boxed{V}$	F
V	V	V	$\boxed{V}$	V

b) *Equivalencia*. Dos proposiciones A y B son lógicamente equivalentes cuando A implica a B y B implica a A. Si dos proposiciones son lógicamente equivalentes no puede ocurrir que tengan distinto valor de verdad. Por ejemplo, las proposiciones "Saldré de viaje a menos que empiece a trabajar" y "Saldré de viaje si y sólo si no empiezo a trabajar" son equivalentes, porque siempre que una sea verdadera, también lo será la otra y siempre que una sea falsa, también lo será la otra. Las leyes lógicas número 4 a 13 son ejemplos de equivalencias lógicas.

Se puede verificar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes mediante el siguiente procedimiento: se construye un bicondicional de la forma "$A \equiv B$" y se realiza la tabla de verdad correspondiente. A es lógicamente equivalente a B si y sólo si el resultado es una tautología. En nuestro ejemplo:

	A				B	
(p	w	q)	≡	(p	≡	– q)
V	F	V	$\boxed{V}$	V	F	F
F	V	V	$\boxed{V}$	F	V	F
V	V	F	$\boxed{V}$	V	V	V
F	F	F	$\boxed{V}$	F	F	V

Es importante comprender que hay múltiples maneras de expresar lo mismo. Muchas controversias constituyen manifestación de diferencias sustanciales, pero otras muchas son producto de diferencias puramente verbales. A propósito de las equivalencias lógicas, dice Blanché:

> ... prácticamente empleamos, en el lenguaje común, semejantes transformaciones. Así decimos indiferentemente, por ejemplo: *Si no me equivoco, tú has venido ya* $(-p \supset q)$ y: *Me equivoco, o tú has venido ya* $(p \vee q)$ o también: Si me encuentra, me saluda siempre $(p \supset q)$ y: *No me encuentra nunca sin saludarme* $-(p \cdot -q)$.
>
> *Introducción a la lógica contemporánea*. R. Blanché. 1950. Bs. As. C. Lohlé, 1963.

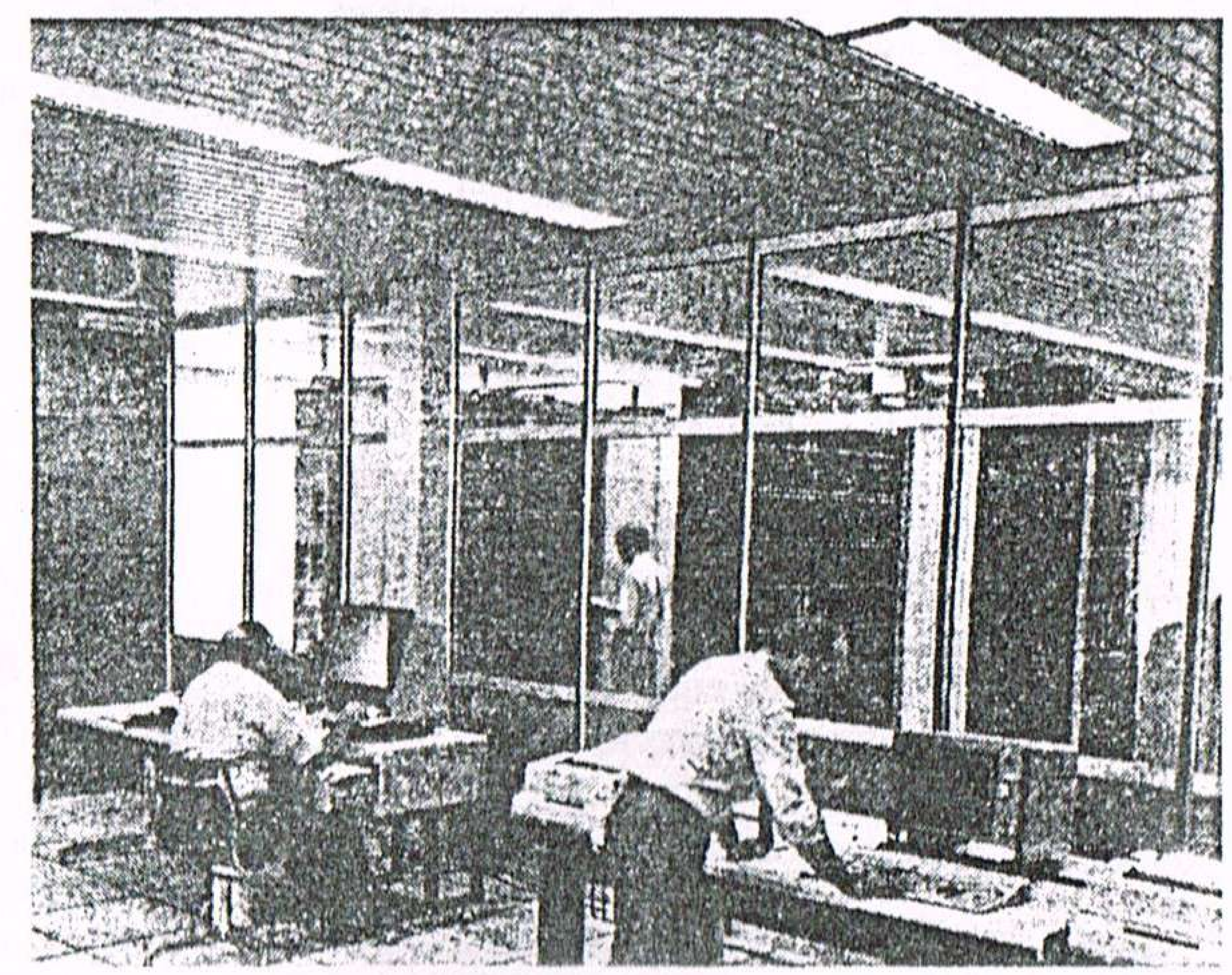
También, si se quiere negar que Pablo trabaja o estudia, es decir, "No es cierto que Pablo trabaja o estudia" se advierte que es equivalente a señalar "Ni Pablo trabaja, ni Pablo estudia".

–	(p	v	q)	≡	(– p	·	– q)
F	V	V	V	$\boxed{V}$	F	F	F
F	F	V	V	$\boxed{V}$	V	F	F
F	V	V	F	$\boxed{V}$	F	F	V
V	F	F	F	$\boxed{V}$	V	V	V

Esto nos permite volver sobre el tema de la simbolización para realizar la siguiente afirmación: dada una proposición hay múltiples maneras de traducirla al simbolismo lógico que son equivalentes. ¿Cómo se simboliza, por ejemplo, "Moscú o Washington serán arrasadas, pero no ambas"? Puede ser simbolizada "p w q" o "(p v q) . – (p . q)"; las dos fórmulas son equivalentes. ¿Cómo se simboliza la proposición "No es cierto que no hay jamón"? Quizás, una parte de los lectores se incline

"Empleamos hoy máquinas – las computadoras – que son formidables constructoras de relaciones tautológicas: dados un programa y los datos con que se la alimenta, la máquina produce una respuesta que resulte *formalmente* verdadera bajo condición de la verdad de aquellas premisas."

Lógica, proposición y norma. D. Echave y otros Astrea, Bs. As., 1980.



por "– – p" y otra parte por "p"; la disputa sería meramente de palabras.

c) *Contradicción.* Dos proposiciones A y B son lógicamente contradictorias cuando no pueden ser ni ambas verdaderas ni ambas falsas. Por ejemplo, las proposiciones "O bien llueve o bien hace frío" y "Llueve si y sólo si hace frío" son contradictorias, porque si una es verdadera, la otra es falsa y recíprocamente.

Se puede verificar que dos proposiciones son contradictorias mediante el siguiente procedimiento: se construye un bicondicional de la forma "A ≡ B" y se realiza la tabla de verdad correspondiente; A y B son contradictorias si y sólo si el resultado es una contradicción.

En nuestro ejemplo:

	A				B	
(p	w	q)	≡	(p	≡	q)
V	F	V	$\boxed{F}$	V	V	V
F	V	V	$\boxed{F}$	F	F	V
V	V	F	$\boxed{F}$	V	F	F
F	F	F	$\boxed{F}$	F	V	F

Actividades

■ Determinar cuáles de las formas proposicionales obtenidas en el ejercicio del parágrafo 4 son tautologías, cuáles contradicciones y cuáles contingencias. Realizar la tarea sólo con aquellas formas proposicionales que no tengan más de tres variables.

■ Buscar 15 pares de proposiciones en los que se verifiquen las relaciones lógicas estudiadas. Cinco en los que se dé implicación, cinco en los que se dé equivalencia y cinco en los que se dé contradicción. Simbolizar las proposiciones y verificar por tablas de verdad el cumplimiento de la relación.

8. Los razonamientos. El método del condicional asociado

La lógica proposicional no sólo permite determinar cuándo una proposición es lógicamente verdadera, lógicamente falsa o ni lo uno ni lo otro desde un punto de vista lógico, sino que también posee métodos para determinar cuándo un razonamiento dado es válido o no lo es. Para ello hay varios procedimientos; de entre ellos, en este texto se presentarán dos, llamados método del condicional asociado y método demostrativo, y una prueba de invalidez.

Estos procedimientos poseen una primera parte que es común: dado un razonamiento, para determinar su validez o invalidez, debe abstraerse su forma lógica. La abstracción de la forma lógica de un razonamiento se realiza de modo similar a la abstracción de la forma lógica de una proposición. Se abstrae la forma lógica de cada proposición que lo integra —premisas y conclusión— cuidando repetir la misma variable proposicional cuando se repite una proposición. Por ejemplo:

Razonamiento

Si tiene la antena adecuada, recibirá la imagen.
No recibe la imagen.

No tiene la antena adecuada.

Forma lógica

$p \supset q$
$-q$

$-p$

Razonamiento

Si estudia inglés, aprenderá el idioma.
Si aprende el idioma, viajará a Inglaterra.

Si estudia inglés, viajará a Inglaterra.

Forma lógica

$p \supset q$
$q \supset r$

$p \supset r$

El método del condicional asociado permite verificar mecánicamente la validez o invalidez de un razonamiento efectuando los siguientes pasos.

1. Dado un razonamiento se abstrae su forma lógica.

2. De la forma de razonamiento se pasa a la forma de proposición mediante la construcción de un condicional cuyo antecedente está constituido por la conjunción de las premisas y cuyo consecuente es la conclusión del razonamiento. A cada forma de razonamiento corresponde una forma proposicional asociada; ésta siempre es una proposición condicional, es decir, el signo "⊃" es el principal; a su vez, en el antecedente, la conectiva principal es siempre la conjunción.

Por ejemplo:

Forma de razonamiento

$p \supset q$
$-q$

$-p$

Forma de proposición

$[(p \supset q) \cdot -q] \supset -p$

Forma de razonamiento

$p \supset q$
$q \supset r$

$p \supset r$

Forma de proposición

$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$

3. Se realiza la tabla de verdad de la forma proposicional obtenida. Si el resultado final es una tautología, el razonamiento en análisis es válido, en caso contrario no lo es.

	1		2		3	
[(p	⊃	q)	·	–q]	⊃	–p
v	V	v	F	f	$\boxed{V}$	f
f	V	v	F	f	$\boxed{V}$	v
v	F	f	F	v	$\boxed{V}$	f
f	V	f	V	v	$\boxed{V}$	v

	1		4		2		5		3	
[(p	⊃	q)	·	(q	⊃	r)]	⊃	(p	⊃	r)
v	V	v	V	v	V	v	$\boxed{V}$	v	V	v
f	V	v	V	v	V	v	$\boxed{V}$	f	V	v
v	F	f	F	f	V	v	$\boxed{V}$	v	V	v
f	V	f	V	f	V	v	$\boxed{V}$	f	V	v
v	V	v	F	v	F	f	$\boxed{V}$	v	F	f
f	V	v	F	v	F	f	$\boxed{V}$	f	V	f
v	F	f	F	f	V	f	$\boxed{V}$	v	F	f
f	V	f	V	f	V	f	$\boxed{V}$	f	V	f

Si, por el contrario, el razonamiento es inválido, la tabla de verdad de su forma condicional asociada no dará por resultado una tautología. Es decir, se pondrá de manifiesto que en el razonamiento en cuestión es posible que se dé la combinación, premisas verdaderas y conclusión falsa. Por ejemplo:

Si Sandy no come las flores del jardín, se le dará un trozo de hígado. A Sandy se le ha dado un trozo de hígado. En consecuencia, Sandy no ha comido las flores.

La forma lógica que le corresponde es:

$-p \supset q$
q

$-p$

Y su forma condicional:

$[(-p \supset q) \cdot q] \supset -p$

Cuya tabla de verdad es como sigue:

	1		2		3	
[(– p	⊃	q)	·	q]	⊃	– p
f	V	v	V	v	F	f
v	V	v	V	v	V	v
f	V	f	F	f	V	f
v	F	f	F	f	V	v

La primera línea de esta tabla de verdad muestra que es formalmente posible en el razonamiento que analizamos que se dé la combinación premisas verdaderas y conclusión falsa; lo cual obviamente hace que la forma de razonamiento resulte inválida.

La tabla de verdad que habíamos adoptado para las proposiciones condicionales muestra ahora toda su utilidad. Una proposición condicional es falsa si y sólo si su antecedente es verdadero y su consecuente es falso y una forma de razonamiento es inválida en el caso en que admita una interpretación, al menos, en que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Por eso la forma proposicional condicional asociada pone de manifiesto la validez o invalidez de un razonamiento dado según sea tautológica o no, respectivamente.

Es interesante recalcar que el procedimiento del condicional asociado es un método *mecánico* de decisión que permite determinar tanto la validez como la invalidez de un razonamiento dado. Lamentablemente, en otros capítulos de la lógica no se va a poder aplicar ningún procedimiento mecánico para la decisión acerca de la validez o invalidez. En estos otros capítulos de la lógica será necesario aplicar un método no mecánico, que es el método demostrativo, del cual pasamos a ocuparnos previa exposición de las "reglas lógicas" necesarias en la aplicación del método.

Actividades

■ Abstraer la forma lógica de los siguientes razonamientos:

1. Si Carlos fue a clase, se encontró con Mario. Pero, en realidad, no se encontró con Mario. Por lo tanto, no fue a clase.
2. En febrero, en París llueve o hace frío. No llueve. Luego, hace frío.
3. Si Patricia fue a la fiesta, estuvo con Eusebio. Si estuvo con Eusebio, Andrés estará molesto. Pero Andrés no está molesto. En consecuencia, Patricia no fue a la fiesta.
4. Si Susana viaja a Salta, llegará a Zapla. Ya que si viaja a Salta, llegará a Jujuy y si llega a Jujuy, visitará Zapla.
5. Alberto ingresa a la facultad si y sólo si aprueba el examen. Si aprueba el examen, ha estudiado mucho. Por lo tanto, si no ha estudiado mucho, no ingresa a la facultad.
6. Si la nueva política económica tiene éxito, habrá prosperidad y se detendrá la inflación. La nueva política económica tiene éxito. Por lo tanto, habrá prosperidad y se frenará la inflación, o habrá reactivación.
7. Si se desborda el río, habrá inundación. Luego, si no hay inundación el río no se desborda.
8. La democracia se consolida si y sólo si hay participación popular. Pero si hay participación popular, las provocaciones estarán a la orden del día. Hay participación popular. En consecuencia, la democracia se consolida, pero las provocaciones estarán a la orden del día.
9. Si estos libros dicen lo mismo que el Corán, entonces son inútiles. Si no dicen lo mismo, son nocivos. Pero estos libros dicen lo mismo o no dicen lo mismo. Luego, son inútiles o son nocivos.
10. José no estudia ni trabaja. Si no trabaja, no tiene dinero y sin dinero, no se irá de su casa. Por lo tanto no se irá de su casa.

■ Determinar cuáles de las formas de razonamiento obtenidas en el ejercicio anterior corresponden a razonamientos válidos y cuáles a razonamientos inválidos por el método del condicional asociado. Realizar la tarea sólo con aquellas formas de razonamiento que no tengan más de tres variables.

9. Reglas lógicas

Mientras las leyes lógicas son formas proposicionales que al sustituir sus variables proposicionales por proposiciones dan lugar a proposiciones siempre verdaderas, las *reglas lógicas* son formas de razonamiento válidas y elementales, al sustituir sus variables por constantes dan lugar a razonamientos válidos. Con la ayuda de estas reglas lógicas elementales es posible demostrar la validez de razonamientos bastante más complejos. En su formulación se utilizan, al igual que en las relaciones lógicas entre proposiciones estudiadas anteriormente, las letras "A", "B", "C", etc., denominadas variables metalógicas, para indicar que cada una de ellas puede designar una proposición atómica o molecular, tan compleja como se quiera. Algunas de las más importantes reglas lógicas son las siguientes:

1. Modus Ponendo Ponens (*MPP*)
$$\begin{array}{l} A \supset B \\ A \\ \hline B \end{array}$$
2. Modus Tollendo Tollens (*MTT*)
$$\begin{array}{l} A \supset B \\ -B \\ \hline -A \end{array}$$
3. Silogismo Disyuntivo (*SD*)
$$\begin{array}{l} A \vee B \\ -A \\ \hline B \end{array}$$
4. Silogismo Hipotético (*SH*)
$$\begin{array}{l} A \supset B \\ B \supset C \\ \hline A \supset C \end{array}$$
5. Dilema Constructivo (*DC*)
$$\begin{array}{l} A \supset B \\ C \supset D \\ A \vee C \\ \hline B \vee D \end{array}$$
6. Dilema Destructivo (*DD*)
$$\begin{array}{l} A \supset B \\ C \supset D \\ -B \vee -D \\ \hline -A \vee -C \end{array}$$
7. Simplificación (*Simpl.*)
$$\begin{array}{l} A \cdot B \\ \hline A \end{array}$$
8. Adición (*Adic.*)
$$\begin{array}{l} A \\ \hline A \vee B \end{array}$$
9. Conjunción (*Conj.*)
$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline A \cdot B \end{array}$$
10. Reemplazo de equivalentes (*RE*)
Dos formas proposicionales lógicamente equivalentes pueden sustituirse la una por la otra.

De acuerdo con lo que señalamos, las letras "A", "B", "C", etc., reemplazan a formas proposicionales atómicas o moleculares; por lo tanto, si consideramos, por ejemplo, la regla del Modus Ponendo Ponens, cualquiera de las siguientes formas de razonamiento son un ejemplo de sustitución de la misma:

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{l} (p \cdot -q) \supset r \\ p \cdot -q \\ \hline r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [p \cdot (q \vee r)] \supset (-s \cdot t) \\ p \cdot (q \vee r) \\ \hline -s \cdot t \end{array}$$

porque todas estas formas de razonamiento responden a la estructura:

$$\begin{array}{l} A \supset B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

La regla de reemplazo de equivalentes (RE) autoriza a usar las leyes lógicas que señalan equivalencia lógica, es decir, aquellas en las cuales la conectiva principal es un bicondicional (leyes 4 a 13 del parágrafo 6), por ejemplo, la ley de doble negación "– – p ≡ p"; esta regla autoriza a reemplazar la expresión "p" por la expresión "$--p$" y viceversa, allí donde sea útil hacerlo.

Se puede pensar que los razonamientos que expresan las reglas lógicas son demasiado elementales como para que tengan alguna importancia. Sería un error. Las reglas lógicas son, en efecto, formas de razonamiento válidas y elementales, pero con su ayuda se puede demostrar la validez de razonamientos más complejos.

10. Método demostrativo

El método demostrativo es otro procedimiento apto para demostrar la validez de un razonamiento dado. El método consta de los siguientes pasos:

1. Dado un razonamiento, se abstrae su forma lógica.

2. Dejando de lado la conclusión, y por aplicación de las reglas lógicas a las premisas, se van derivando formas proposicionales hasta llegar a la conclusión: si esto se logra, el razonamiento es válido.

Por ejemplo:

1. *Razonamiento*	*Forma lógica*
Si Patricia fue a la fiesta, entonces estuvo con Eusebio.	$p \supset q$
Si Patricia estuvo con Eusebio, Andrés estará molesto.	$q \supset r$
Andrés no está molesto.	$-r$
Patricia no fue a la fiesta.	$-p$

2. Se hace a un lado la conclusión y se numeran las premisas.

1. $p \supset q$
2. $q \supset r$
3. $\underline{-r \qquad\qquad}$ / $-p$

Utilizando únicamente las premisas, ¿qué se puede derivar, por aplicación de las reglas lógicas? ¿Se podrá llegar a la conclusión aplicando las reglas lógicas?

1. $p \supset q$
2. $q \supset r$
3. $\underline{-r \qquad\qquad}$ / $-p$
4. $p \supset r$ de 1 y 2 por Silogismo Hipotético.
5. $-p$ de 4 y 3 por Modus Tollendo Tollens.

Se ha logrado llegar a la conclusión, partiendo de las premisas y efectuando transformaciones legitimadas por las reglas lógicas; por lo tanto, el razonamiento es válido.

Este procedimiendo, parecido a la demostración de un teorema en geometría, es uno de los más interesantes en la lógica proposicional, pues no es mecánico, sino que, en general, permite llegar a la conclusión, si el razonamiento es válido, a través de diversos pasos. Por ejemplo, en el razonamiento anterior también se pudo haber procedido de la siguiente manera:

1. $p \supset q$
2. $q \supset r$
3. $\underline{-r \qquad\qquad}$ / $-p$
4. $-q$ de 2 y 3 por Modus Tollendo Tollens.
5 $-p$ de 1 y 4 por Modus Tollendo Tollens.

Las demostraciones anteriores constituyen ejemplos de lo que se denomina una *prueba formal de validez*. Copi proporciona la siguiente definición de este concepto:

> Una *prueba formal de validez* para un argumento dado se define como una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales es una premisa de ese argumento o se sigue de los precedentes por un argumento válido elemental, y tal que el último enunciado de la secuencia es la conclusión del argumento cuya validez se está demostrando.
>
> *Logica simbólica*. I. Copi. 1967
> CECSA, México, 1979

Actividades

■ Indicar qué regla se ha aplicado en cada paso de las siguientes demostraciones, en qué paso o pasos anteriores.

1.
   1. $p \wedge q$
   2. $\underline{(p \vee r) \Rightarrow s}$ / $p \cdot s$
   3. p
   4. $p \vee r$
   5. s
   6. $p \wedge s$

2.
   1. $p \Rightarrow q$
   2. $p \vee r$
   3. $\underline{-q \qquad}$ / r
   4. $-p$
   5. r

3.
   1. $-(p \wedge q) \vee r$
   2. $r \Rightarrow s$
   3. $\underline{-s \qquad\qquad}$ / $-p \vee -q$
   4. $-r$
   5. $-(p \wedge q)$ ·
   6. $-p \vee -q$

4.
   1. $-(p \wedge q)$
   2. $\underline{p \qquad\qquad}$ / $-q \vee r$
   3. $-p \vee -q$
   4. $--p$
   5. $-q$
   6. $-q \vee r$

5.
   1. $p \Rightarrow q$
   2. $\underline{r \Rightarrow -q}$ / $p \supset -r$
   3. $--q \Rightarrow -r$
   4. $q \Rightarrow -r$
   5. $p \Rightarrow -r$

6.
   1. $(p \vee q) \supset (r \cdot s)$
   2. $\underline{-r \qquad\qquad}$ / $-p$
   3. $-r \vee -s$
   4. $-(r \cdot s)$
   5. $-(p \vee q)$
   6. $-p \cdot -q$
   7. $-p$

■ Efectuar las deducciones correspondientes según lo indicado en cada paso.

1.
   1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   2. p
   3. $\underline{-p \vee q \qquad}$ / $r \vee s$
   4. de 2 por RE (DN)
   5. de 3 y 4 por SD
   6. de 2 y 5 por Conj.
   7. de 1 y 6 por MPP
   8. de 7 por Adic.

2.
   1. $-(p \Rightarrow q) \supset r$
   2. $r \Rightarrow s$
   3. $\underline{-s \qquad}$ / $-p \vee q$
   4. de 1 y 2 por SH
   5. de 3 y 4 por MTT
   6. de 5 por RE (DN)
   7. de 6 por RE (Def. Condic.)

3.
   1. $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge s)$
   2. p
   3. $\underline{r \Rightarrow t \qquad}$ / t
   4. de 2 por Adic.
   5. de 1 y 4 por MPP
   6. de 5 por Simpl.
   7. de 3 y 6 por MPP

4.
   1. $-p \equiv q$
   2. $\underline{-q \vee r}$ / $-r \Rightarrow p$
   3. de 1 por RE (Def. bicondic.)
   4. de 2 por RE (Def. condic.)
   5. de 3 por Simpl.
   6. de 4 y 5 por SH
   7. de 6 por RE (Transp.)
   8. de 7 por RE (DN)

> "...comenzamos con un conjunto de fórmulas que llamamos *premisas*.
> El objeto del juego consiste en aplicar las reglas de manera que se obtenga alguna otra fórmula dada (la conclusión deseada). El conjunto de premisas corresponde a la posición inicial de un jugador en un juego. Por una sucesión de jugadas, en que cada jugada está sancionada por una regla, llegamos a la posición del triunfo: la conclusión buscada. Como en un juego, las reglas permiten toda clase de jugadas tontas; el problema radica en aprender a ejecutar las jugadas pertinentes.[...] Ahora bien, en un juego como el bridge o el ajedrez se escogen reglas que se supone han de dar como resultado algo interesante o entretenido. En cambio, la teoría de la inferencia lógica es algo más que entretenida".
>
> *Introducción a la lógica simbólica*. P. Suppes. 1966. México, CECSA, 1974.

11. Prueba de invalidez

El método demostrativo permite demostrar que un determinado razonamiento es válido. Pero si por aplicación reiterada de las reglas lógicas no se puede llegar a la conclusión, no se habrá demostrado que el razonamiento es inválido: puede ocurrir que efectivamente lo sea o que sencillamente no demos con las reglas adecuadas para efectuar la demostración.

La prueba de invalidez, que complementa al método demostrativo, es un procedimiento que permite demostrar que un razonamiento dado es inválido.

La prueba consta de los siguientes pasos.

1. Dado un razonamiento se abstrae su forma lógica.

Federico posee cédula de identidad o pasaporte.
Tiene cédula de identidad.
Luego, no posee pasaporte.

$p \vee q$
p
———
$-q$

2. Si el razonamiento es inválido, su forma podrá dar lugar a la combinación: premisas verdaderas, conclusión falsa. *Suponemos* entonces que es inválido anotando al lado de cada premisa el valor "V" y al lado de la conclusión el valor "F".

1	2
$p \vee q$	V
p	V
———	—
$-q$	F

3. Tratamos ahora de confirmar nuestra suposición asignando a cada variable proposicional un valor de verdad de modo tal que se ratifique la suposición inicial. En nuestro ejemplo hemos optado por considerar a "p", "V" y a "q", también "V".

1	2	3
$p \vee q$	V	V $\vee$ V
p	V	V
———	—	———
$-q$	F	$-$V

4. Resolvemos las expresiones que tenemos en 3.

1	2	3	4
$p \vee q$	V	V $\vee$ V	V
p	V	V	V
———	—	———	—
$-q$	F	$-$V	F

En la columna 4 observamos que se ha confirmado la suposición que habíamos hecho en 2. Por lo tanto, el razonamiento es inválido.

El paso fundamental del procedimiento es el número 3; en este paso podemos asignar a las variables el valor que más nos convenga para tratar de ratificar lo que hemos supuesto en 2; lo que se debe recordar es que sólo se le puede asignar un único valor a cada variable y que ese valor debe mantenerse todas las veces que reemplaza a la variable.

He aquí otro ejemplo:

1	2	3	4
$p \supset q$	V	F $\supset$ V	V
$q \supset -r$	V	V $\supset$ $-$F	V
$-r$	V	$-$F	V
———	—	———	—
p	F	F	F

En este caso se ha hecho la siguiente asignación: "p" = "F", "q" = "V" y "r" = "F". Conviene observar que, en este ejemplo, la prueba de invalidez se puede construir también considerando a "q" = "F".

Actividades

■ Demostrar la invalidez de las siguientes formas de razonamiento mediante el procedimiento de asignación de valores.

1. $p \supset q$
   $q \supset r$
   $-p$
   ———
   $-r$

2. $(p \cdot q) \vee -r$
   $-r$
   ———
   $-(p \cdot q)$

3. $(p \cdot -q) \supset -r$
   $-r \vee s$
   s
   ———
   $-(p \cdot -q)$

4. $p \equiv (q \cdot r)$
   $(p \vee s) \cdot -(p \cdot s)$
   $s \supset (p \vee t)$
   ———
   $-(q \cdot r)$

5. $-(p \cdot q)$
   $(-p \cdot -q) \supset (r \cdot s)$
   $s \supset r$
   ———
   r

6. $p \cdot q$
   $p \supset (r \vee s)$
   $q \vee t$
   ———
   t

Actividades de cierre

■ Tanto por el método del condicional asociado, como por el método demostrativo y la prueba de invalidez podemos determinar la validez o invalidez de los razonamientos con los que habíamos comenzado este capítulo, a saber:

Si la historia ha llegado a su fin, entonces la humanidad está condenada a repetirse. Efectivamente, la historia ha llegado a su fin. Por lo tanto, la humanidad está condenada a repetirse.

Si las variables económicas permanecen estables, entonces hay reactivación y crecimiento. Las cifras indican que hay reactivación y crecimiento. En consecuencia, las variables económicas permanecen estables.

Respectivamente, sus formas lógicas son:

$p \supset q$
p
———
q

$p \supset (q \cdot r)$
$q \cdot r$
———
p

■ ¿Cuál es válido y cuál es inválido? Demostrarlo por el método del condicional asociado y construir una prueba de invalidez para el que resulte inválido.