Unidad 1 – Parte 1 - Teoría de Grafos

Introducción

En este capítulo veremos la noción matemática de grafo y propiedades de los mismos. En capítulos subsiguientes veremos las estructuras de datos utilizadas comúnmente para su representación en lenguajes de programación junto con algoritmos para trabajar con ellos.

Definiciones

Un ***grafo*** es un par de conjuntos G = (V,A) donde A $\subseteq$ P(V), tales que los elementos de A son subconjuntos de V de cardinal 1 o cardinal 2.

Los elementos de V se denominan ***vértices*** (o nodos) del grafo G y los elementos de A se denominan ***aristas*** (o líneas) del grafo G. Al conjunto de vértices de un grafo G se lo denota G(V), y al conjunto de aristas de un grafo G se lo denota G(A).

Existe una forma natural de representar gráficamente un grafo. Para ello representamos los vértices como círculos y las aristas de la forma {u,v} como una línea que une los vértices u y v, y las aristas de la forma {u} como un lazo.

Ejemplo:

En la fig. 1 se representa el grafo, G=(V,A) donde: V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
A = { {1,2}, {1,3}, {1,5}, {3}, {3,4}, {4,5}, {5,6} }

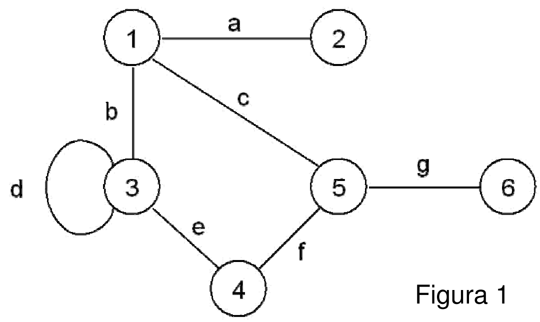

Figura 1

Se denomina ***orden*** del grafo G, a la cantidad de vértices de G y se denota como |G|.
La cantidad de aristas de G se denota como ||G||. Los grafos pueden ser ***finitos*** o ***infinitos*** de acuerdo a su orden. En este curso se considerarán solamente grafos finitos.

Ejemplo:

El orden del grafo anterior es 6, esto es |G|= 6, y ||G|| = 7.
Dado que el orden del grafo es finito, dicho grafo es finito.

Incidencia y adyacencia

Un vértice v es ***incidente*** con una arista *a* (o la arista *a* incide en el vértice v) si v es un elemento de *a*. Gráficamente, esto se puede ver como que la línea correspondiente a la arista *a* tiene alguno de sus extremos en el vértice *v*. Por ejemplo, en el grafo de la fig. 1, el vértice 1 es incidente con la arista {1,2}.

Si dos vértices u y v son incidentes con la misma arista *a*, se dice que u y v son ***adyacentes***, es decir, para un grafo G = (V, A) *u* y *v* son adyacentes si $\{u,v\} \in A$. En forma gráfica, esto se puede ver como que los vértices *u* y *v* están conectados por la línea correspondiente a la arista *a*. Por ejemplo, en el grafo de la fig. 1, los vértices 1 y 5 son adyacentes, y los vértices 2 y 6 no lo son.

Dos aristas a1 y a2 ($a1 \neq a2$) se dice que son adyacentes, si $a1 \cap a2 \neq \emptyset$. En forma gráfica, esto significa que ambas aristas comparten al menos uno de sus extremos. Por ejemplo, en el grafo de la figura 1, las aristas {1,2} y {3,1} son adyacentes. También lo son las aristas {3} y {4,3}.

Grafos particulares

Al grafo $(\emptyset,\emptyset)$ se le denomina el ***grafo vacío*** y simplemente se denota $\emptyset$.
Un grafo de orden 0 u orden 1 se denomina ***grafo trivial***.

Un grafo G es ***simple***, si todos los elementos de G(A) tienen cardinal 2. Es decir, si no existen lazos en el grafo.

Un grafo G es ***completo*** si:

- es simple y
- dados dos vértices $u \in G(V)$ y $v \in G(V)$ ($u \neq v$) se cumple que u y v son adyacentes.

El grafo dado en el ejemplo anterior no es completo, dado que los vértices 2 y 6 no son adyacentes (entre otros). Para que un grafo sea completo debe cumplirse que exista una arista entre cualquier par de vértices diferentes.

Grafos disjuntos: Se dice que dos grafos G = (V, A) y G' = (V', A') son disjuntos si y solo si $V \cap V' = \emptyset$. Es decir, si no tienen ningún vértice en común.

Subgrafos

Subgrafo: Se dice que G' = (V',A') es un subgrafo de G=(V,A) si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. O sea que todo vértice de G' es también vértice de G y toda arista de G' es también arista de G. También se dice que G es un supergrafo de G'.

Por ejemplo, consideremos el grafo G de la figura 1 y el siguiente grafo G' = (V',A'), donde V' = {1,3,4,5} y A' = { {1,3}, {1,5}, {4,5} }. Se cumple que todos los vértices de V' también están en V, y que todas las aristas en A' también están en A. Por tanto, decimos que G' es un subgrafo de G.

Subgrafo inducido por un conjunto de vértices: Sean G' = (V',A') y G = (V,A), y G' es un subgrafo de G, se dice que G' es un subgrafo de G inducido por V', si G' contiene todas las aristas de G, restringido a los vértices de V'. La notación que se utiliza es G' = G[V].

Es decir:
Sea G = (V,A) un grafo y $U \subseteq V$, denotamos por G[U] al grafo G' = (V',A') tal que:

$V' = U$

$A' = \{ x : x \subseteq U \text{ y } x \in G(A) \}$

El subgrafo inducido es tal que contiene a todos aquellos vértices de G que están en U, y también contiene a todas las aristas de G que son incidentes a todos los vértices en U.

Por ejemplo, consideremos el subgrafo G' del ejemplo anterior. En este caso, el conjunto de vértices U de G' es U = {1,3,4,5}. Para que G' sea un subgrafo de G inducido por U, debería cumplirse que en A' se encuentren todas las aristas de G que son incidentes a los vértices en U. Sin embargo, esto no ocurre, ya que en A' no se encuentran las aristas {3} y {3,4}. Tales aristas son incidentes a vértices de U en G, pero no son aristas en G'. Por lo tanto, concluimos que G' no es un subgrafo inducido de G por U.

Conjunto de Vecinos

Sea G = (V, A) un grafo no vacío. Dado un vértice v, el **conjunto de los vecinos de v** es el conjunto de todos aquellos vértices que son adyacentes con v, exceptuando al propio v.
Dicho conjunto, denotado por $N_G(v)$ es:

$$N_G(v) = \{y: \{v,y\} \in A\} - \{v\}$$

La noción de conjunto de vecinos también es extensible a un conjunto de vértices. Dado un conjunto de vértices $U \subseteq V$, el **conjunto de los vecinos de los vértices de U** se define como la unión de todos los conjuntos de vecinos de los vértices de U, exceptuando a los vértices de U. Dicho conjunto, denotado por $N_G(U)$ es:

$$N_G(U) = (\cup_{v \in U} N_G(v)) - U$$

Grado

El **grado** (o valencia) de un vértice v de un grafo G (denotado como $d_G(v)$), se define como:

- el cardinal de $N_G(v)$ si {v} no pertenece a G(A)
- el cardinal de $N_G(v)$ + 2, si {v} pertenece a G(A).

Gráficamente, el grado de un vértice *v* puede verse como la cantidad de extremos de aristas que son incidentes con el vértice *v*. De acuerdo con la definición, nótese que si en *v* existe un lazo, dicho lazo aporta dos extremos de línea (los dos extremos del lazo) adicionales al grado del vértice.

Si para un vértice v, $|N_G(v)| = 0$, se dice que v es un **vértice aislado**. Es un vértice que no posee aristas que lo conecten con ningún otro vértice.

Se denomina el **grado mínimo de un grafo G** (denotado como $\delta(G)$) a:

$$\delta(G) = \min \{d_G(v): v \in G(V)\}$$

Se denomina el **grado máximo de un grafo G** (denotado como $\Delta(G)$) a:

$$\Delta(G) = \max \{d_G(v) : v \in G(V)\}$$

El grado mínimo de un grafo surge del vértice con menor grado del grafo, mientras que el grado máximo surge del vértice con mayor grado del grafo.

Grafo Regular: Un grafo G es regular si todos los vértices tienen el mismo grado.
Si ese grado es k, se dice que el grafo es k-regular.

Caminos y Ciclos

Dado un grafo G = (V, A), un **camino** P en G, es una secuencia de vértices de V

$$v_1, v_2, ..., v_k \text{ tales que } \{v_i, v_{i+1}\} \in A \ \forall_{1 \leq i < k}.$$

A los vértices v_1 y v_k se los denomina **extremos del camino**. A los restantes vértices se los denomina **vértices interiores** del camino. Por ejemplo, para el grafo de la figura 1, un posible camino es: 1, 5, 6, 5, 4. De acuerdo con la definición de camino, tenemos que las aristas {1,5}, {5,6}, {6,5}, {5,4} pertenecen al grafo.

La cantidad de aristas de un camino se denomina el **largo del camino**, y a los caminos de largo k, se los denota como C^k. El camino puede tener largo cero. Si el camino repite aristas se cuentan tantas veces como ocurran. Por ejemplo, el camino del ejemplo anterior tiene largo 4, y repite la arista {5,6} (la recorre en ambos sentidos).

Dos caminos son **independientes**, si ninguno de ellos contiene vértices interiores del otro. Por ejemplo, los caminos 4,3,1,2 y 4,5,6 son independientes en el grafo de la figura 1.

La **distancia** de dos vértices en un grafo G, es el largo del camino más corto entre ambos vértices (notación: $\text{distancia}_G(x,y)$). Por ejemplo, para el grafo de la figura 1, tenemos que $\text{distancia}_G(1,6) = 2$.

Se denomina el **diámetro** de un grafo G (notación: diametro(G)) a:

$$\text{diametro}(G) = \max \{ \text{distancia}_G(x,y) : x,y \in G(V) \}$$

Por ejemplo, para el grafo de la figura 1, tenemos que diámetro(G) = **3**, dado que:

$\text{distancia}_G(1,2) = 1$	$\text{distancia}_G(2,3) = 2$	$\text{distancia}_G(3,5) = 2$
$\text{distancia}_G(1,3) = 1$	$\text{distancia}_G(2,4) = \mathbf{3}$	$\text{distancia}_G(3,6) = \mathbf{3}$
$\text{distancia}_G(1,4) = 2$	$\text{distancia}_G(2,5) = 2$	$\text{distancia}_G(4,5) = 1$
$\text{distancia}_G(1,5) = 1$	$\text{distancia}_G(2,6) = \mathbf{3}$	$\text{distancia}_G(4,6) = 2$
$\text{distancia}_G(1,6) = 2$	$\text{distancia}_G(3,4) = 1$	$\text{distancia}_G(5,6) = 1$

Un **ciclo** en un grafo G = (V,A) es un camino $C = v_1,v_2,\ldots\ldots\ldots, v_k, v_1$ tal que $v_i \neq v_j \; \forall_{\, i > 1}$.

Los ciclos son caminos que comienzan y terminan en el mismo vértice y no repiten vértices interiores. Por ejemplo, en el grafo de la figura 1 los caminos c1 = 1,3,4,5,1 y *c*2 = 3,3 son ciclos.

El largo del menor ciclo que pueda contener un grafo G se denomina el **girth** del grafo, y el largo del mayor ciclo se denomina la **circunferencia** del grafo. Para el grafo de la figura 1 tenemos que girth(G) = 1 y circunferencia(G) = 4.

Grafos conexos y componentes conexas

Un grafo G no vacío se denomina **conexo,** si para cualquier par de vértices de G, existe un camino que los une. Por ejemplo, el grafo de la figura 1 es conexo, pero el grafo de la figura 2 no lo es, ya que no hay ningún camino que una a los vértices 1 y 4 (entre otros).

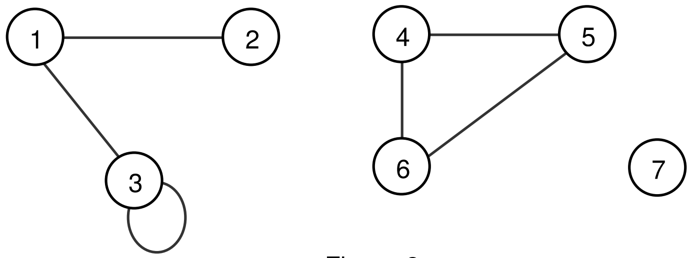

Figura 2

La **componente conexa** de un grafo G = (V,A) para un vértice v, se define como el subgrafo inducido por el siguiente conjunto de vértices: {x: hay camino de v a x en G}.

El grafo de la figura 2 posee tres componentes conexas:

$G_1 = (V_1, A_1)$ donde $V_1 = \{1,2,3\}$ y $A_1 = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{3\} \}$
$G_2 = (V_2, A_2)$ donde $V_2 = \{4,5,6\}$ y $A_2 = \{ \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\} \}$
$G_3 = (V_3, A_3)$ donde $V_3 = \{7\}$ y $A_3 = \{ \}$

Se dice que un vértice v es un **istmo** (o vértice de corte) de un grafo G = (V,A) si se satisface que el subgrafo inducido por (V – {v}) no es conexo. Por ejemplo, para el grafo de la figura 1, el vértice 5 es un istmo, dado que si lo quitamos del grafo, el subgrafo inducido por V – {5} queda disconexo (no existe ningún camino que una los vértices 1 y 6, entre otros). Sin embargo, el vértice **4** no es un istmo, dado que si lo quitamos del grafo, siguen existiendo caminos que unan a todos los demás vértices.

Se dice que una arista a es un **puente** de un grafo G = (V,A) si se satisface que el subgrafo (V, A – {a}) no es conexo. Por ejemplo, para el grafo de la figura 1, la arista {5,6} es un puente, dado que si la quitamos del grafo, el subgrafo (V, A – { {5,6} }) queda disconexo (no existe ningún camino que una a los vértices 4 y 6, entre otros). En cambio, la arista {4,5} no es un puente, dado que si la quitamos del grafo, siguen existiendo caminos que unan a todos los demás vértices.

Árboles y Bosques

Se denominan árboles y bosques a una clase particular de grafos. Un **bosque** es un grafo acíclico, y un **árbol** es un grafo acíclico y además conexo. Los grafos de las figuras 1 y 2 no son árboles ni bosques, mientras que el grafo de la figura 3 sí es un árbol.

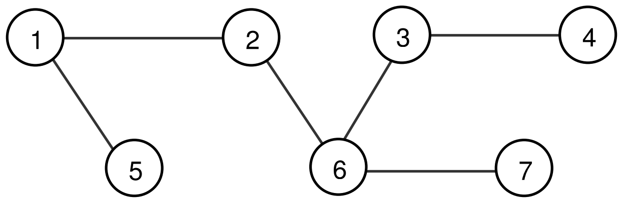

Figura 3

Árboles de Cubrimiento

Dado un grafo G conexo, un **árbol de cubrimiento de G** es un subgrafo de G que es un árbol y que posee el mismo conjunto de vértices que G.

Si G = (V,A), un árbol de cubrimiento T = (U, B) de G cumple que:

U = V
Toda arista de B está en A
T es un árbol

B contiene el mínimo conjunto de aristas necesarias para mantener la conexión de G. Por ejemplo, para el árbol de la figura 1, un posible árbol de cubrimiento es T = (U, B) donde:
U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y B = { {1,2}, {1,3}, {1,5}, {4,5}, {5,6} }