UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fuerza gravitacional a partir del estudio del movimiento de los planetas y satélites

Eduardo Santos Galvis

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Básicas

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Bogotá, Colombia

2015

Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de fuerza gravitacional a partir del estudio del movimiento de los planetas y satélites

Eduardo Santos Galvis

Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

José Gregorio Portilla Barbosa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Básicas
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Bogotá, Colombia
2015

Dedicatoria

Quiero en primer lugar agradecer al Todopoderoso por colaborarme a vencer los obstáculos, por iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a todas a aquellas personas que me apoyaron con sus consejos y con sus ideas durante todo este período de estudio.

A mis padres, por darme siempre su apoyo espiritual porque siempre creyeron en mí y por apoyarme en todo.

A mi hermosa hermana Liliana y su esposo Fernando por ser mi apoyo en todo sentido durante mis estudios.

A mi compañera y amiga María Cristina Martínez Cano por su valioso apoyo y colaboración en la realización de mi proyecto.

"Para explicar toda la naturaleza, no basta ni un hombre ni una edad completa. En lugar, lo mejor es que el hombre busque un poco de verdad y certeza, dejando el resto para los demás, para los que vendrán, con conjeturas y sin dar nada por hecho"

Sir Isaac Newton.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos al profesor José Gregorio Portilla Barbosa, por colaborarme durante la elaboración de mi trabajo, su disposición, sus ideas y sus valiosas sugerencias. A todos los docentes de la Maestría en enseñanza de las Ciencias que me guiaron a través de su experiencia y a los docentes que me dirigieron los cursos de Astronomía Benjamín Calvo Mozo y Guillermo L. Franco, los cuales me abrieron nuevas perspectivas de interdisciplinar la enseñanza de las Matemáticas y la Física con la Astronomía.

Resumen

Uno de los descubrimientos más importantes en el mundo científico es la formulación matemática de la Fuerza Gravitacional y sus consecuencias. El presente proyecto se realizó con estudiantes de educación Media del Colegio Isabel Valbuena Cifuentes del municipio de Vélez, Santander y pretende diseñar e implementar estrategias pedagógicas basadas en el aprendizaje por proyectos, con la finalidad de brindar soluciones a las dificultades que presentan los estudiantes en temas relacionados con la asignatura de Física del área de Ciencias Naturales.

Para el desarrollo de la propuesta se realizaron tres proyectos de aula, que guiaron a los estudiantes paso a paso a través de actividades teóricas – prácticas de participación activa, permitiendo a los docentes de Física y Matemáticas utilizar la Astronomía como recurso motivador, para explicar los diferentes conceptos matemáticos y físicos necesarios para comprender la Fuerza Gravitacional, aplicada al movimiento de los cuerpos celestes.

Palabras claves: Astronomía, fuerza gravitacional, aprendizaje por proyectos, cuerpos celestes.

Abstract

One of the most important discoveries in the scientific world is the mathematical formulation of the gravitational force and its consequences. This project was carried out with high school students of the *Colegio Isabel Valbuena Cifuentes* at the town of *Velez*, *Santander* and it aims designing and implementing educational strategies based on project learning, in order to provide solutions for difficulties that have been arisen to the students on issues related to the subject area Physics Natural Sciences.

On the development of three proposed classroom-projects, it has been guiding students step by step through theoretical activities that they were developing through active participation practices, allowing teachers of Physics and Mathematics using astronomy as a motivational resource to explain the different mathematical and physical concepts that are needed to understand the gravitational force applied to the motion of celestial bodies.

Keywords: Astronomy, gravitational force, project learning, celestial bodies.

Contenido

Pág.

Resumen V
Abstract VI
Introducción 1
Planteamiento del problema 3
Objetivos 4
Objetivo general 4
Objetivos especificos 4
1. Aspectos disciplinarios y epistemológicos de la Ley de Gravitación Universal 5
1.1 Antecedentes de la gravitación universal 5
2. Marco disciplinar 15
2.1 Ley de la gravitación universal 15
2.1.1 Campo gravitatorio 19
2.1.2 Consideraciones físicas que relacionan la Fuerza Gravitacional y el movimiento de los cuerpos celestes y terrestres. 22
3. Descripción de la propuesta didáctica 26
3.1 Contexto institucional 26
3.2 Estrategia didáctica 27
3.2.1 Aprendizaje por proyectos 27
3.3 Metodología 28
4. Diseño y ejecución de la propuesta didáctica 31
4.1 Diagnóstico 31
4.1.1 Primera prueba diagnóstica 31
4.1.2 Segunda prueba diagnóstica 35
4.2 Diseño de los proyectos de aula 37
5. Conclusiones y recomendaciones 47
5.1 Conclusiones 47
5.2 Recomendaciones 48

A. Anexo: Prueba diagnóstica 49
1. Primera prueba diagnóstica 49
2. Segunda prueba diagnóstica 52
B. Anexo: Primer proyecto de Aula 55
C. Anexo: Segundo proyecto de aula 68
D. Anexo: Tercer proyecto de aula 94
E. Anexo: Videos de la práctica 111
Bibliografía 112

Lista de figuras

Pág.

Figura 1: Modelo heliocéntrico de Copérnico (Figuras izquierda y centro) comparado con el modelo geocéntrico de Ptolomeo (figura derecha)…..6

Figura 2: El modelo geocéntrico de Tycho Brahe el cual localiza la Tierra inmóvil en el centro, a su alrededor gira el Sol, en torno del cual giran todos los planetas…….. 7

Figura 3: Trayectoria elíptica de un planeta alrededor del Sol……. 11

Figura 4: Relación entre la caída de un cuerpo y la Luna girando alrededor de la Tierra.……16

Figura 5: El satélite de Newton, representa las curvas que un cuerpo describiría si fuese proyectado en dirección horizontal desde la cima de una montaña……...16

Figura 6: Fuerza de atracción entre dos cuerpos celestes…….18

Figura 7: Diagrama de Cavendish para medir la constante gravitacional G……...19

Figura 8: Un satélite de masa m moviéndose alrededor de la Tierra con una órbita circular de radio r con una velocidad constante v……..…21

Figura 9: Órbita elíptica descrita por un planeta de masas m y velocidad V alrededor del Sol……..……22

Figura 10: Resultados estadísticos de la primera prueba diagnóstica realizada a estudiantes de décimo grado……. 34

Figura 11: Resultados estadísticos de la segunda prueba diagnóstica realizada estudiantes de décimo y undécimo grado……. 35

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1: Características principales de los planetas del sistema solar…….… 25

Lista de cuadros

Pág.

Cuadro 1: Fases del diseño, implementación y análisis de resultados del proyecto….....28

Cuadro 2: Análisis de la primera prueba diagnóstica realizada a estudiantes de grado décimo…….32

Cuadro 3: Análisis de la segunda prueba diagnóstica realizada a estudiantes de grado décimo y undécimo……...36

.

Introducción

Desde los albores de la civilización, el ser humano se ha interesado por el estudio de la Astronomía, en especial por el movimiento de los cuerpos celestes. En principio nuestro nivel de entendimiento se reducía tan solo a lo que nuestros ojos podían observar, posteriormente con la invención del Telescopio por Galileo, se amplió nuestro panorama, aumentando así mismo nuestras preguntas y las fronteras de nuestra propia imaginación.

Actualmente, los límites de nuestra percepción se extendieron aún más, gracias a los avances en el campo de los viajes espaciales, la construcción y puesta en órbita de satélites y él envió de sondas espaciales robotizadas a planetas y asteroides distantes. Todos estos avances, se han logrado gracias al trabajo interdisciplinario de la Física, las Matemáticas, la Astronomía y la Ingeniería.

Los estudiantes de la media vocacional del colegio Isabel Valbuena Cifuentes del municipio de Vélez -Santander, presentan dificultades en la apropiación del concepto de gravitación universal incluido en el plan de estudios de la asignatura de Física, evidenciando un gran desinterés en su aprendizaje, debido a que no le encuentran utilidad ni aplicabilidad en su vida diaria.

Al respecto, se encuentra bastante información acerca del tema de la fuerza gravitacional a nivel universitario, que podría ser adaptada a la media vocacional, al igual que diversos estudios sobre la dinámica celeste que se tuvieron en cuenta en la formulación e implementación de esta propuesta.

Desde esta perspectiva, desarrollar prácticas de Astronomía con los estudiantes de la media vocacional a través de una secuencia organizada y direccionada de actividades de proyectos de aula, permitió la adquisición de habilidades para la observación, indagación, planificación, resolución de problemas y ejecución de tareas en equipos

colaborativos de trabajo. Así mismo exigió un gran compromiso individual y grupal durante todo el proceso.

El aprendizaje basado en proyectos es un modelo en el que los docentes y estudiantes planean, implementan y evalúan proyectos que tienen aplicación en el mundo real más allá del aula de clase (Blank, 1997); (Dickinson, Soukamneuth, & Yu, 1998); (Harwell, 1997). En los proyectos se desarrollan actividades de aprendizaje interdisciplinarias, de largo plazo y centradas en el estudiante. (Challenge, 1999).

Esta propuesta permitirá a los docentes de Física y Matemáticas de educación media, utilizar la Astronomía como recurso motivador para explicar de una manera didáctica los temas que conduzcan a comprender significativamente la Fuerza Gravitacional, de tal forma que el estudiante llegue a conclusiones de cómo el movimiento de los cuerpos celestes se rigen por este concepto.

Planteamiento del problema

La Astronomía es un tema avanzado en varios países desarrollados como Estados Unidos, la Unión Europea y Japón; en Latinoamérica, se pueden mencionar a Brasil, México, Chile y Argentina. En Colombia estos estudios se han reducido a pequeños grupos de investigación en algunas universidades y a nivel de educación secundaria su conocimiento es escaso; en los planes de estudio de Física y Matemáticas no es evidente su articulación con la Astronomía.

En el Colegio Isabel Valbuena del municipio de Vélez – Santander, no existe la asignatura de Astronomía como tal y la Física aborda temas muy generales. Los estudiantes de la media vocacional en su mayoría son de las zonas rurales de estratos uno y dos, dedicados a las labores del campo y a la producción del bocadillo; presentan dificultades en la apropiación del concepto de gravitación universal y muestran desinterés en su aprendizaje, debido a que no tienen la oportunidad de relacionar sus conocimientos previos con la realidad, por encontrarse en un sistema poco flexible planteado desde un currículo institucional. Además de esto, los docentes no tienen una estrategia que permita la adquisición de estos conceptos de forma significativa.

Estas dificultades tienen que ver con las estrategias que se utilicen en el aula y la manera como se motive al estudiante para hacerlo.

En este contexto, la pregunta que surge es: *¿Cómo enseñar el concepto de gravitación universal a los estudiantes de educación media a partir del estudio del movimiento de los planetas y satélites?*

Objetivos

Objetivo general

Diseñar y aplicar una propuesta didáctica por medio de proyectos de aula a los estudiantes de educación media para la comprensión del concepto de fuerza gravitacional a partir del estudio del movimiento de los planetas y satélites.

Objetivos específicos

- Realizar un análisis conceptual y epistemológico de la fuerza gravitacional y su influencia en la Astronomía.

- Valorar el impacto de los avances científicos en la exploración del espacio y su relación con la fuerza gravitacional.

- Diseñar proyectos de aula sobre el movimiento de planetas, satélites y proyectiles para estudiantes de educación media.

- Implementar proyectos de aula como estrategia didáctica para la comprensión del concepto de Fuerza gravitacional.

1. Aspectos disciplinarios y epistemológicos de la Ley de Gravitación Universal

1.1 Antecedentes de la gravitación universal

La astronomía ha estado relacionada con otros campos del saber y sus investigaciones han incentivado el espíritu científico en campos de las Ciencias Naturales, en especial la Física, donde la Matemática ha sido utilizada como una herramienta para diseñar los modelos abstractos que describen las trayectorias parabólicas y elípticas de los cuerpos.

Estas investigaciones han inspirado al hombre a diseñar vehículos, que viajan a través del espacio terrestre y fuera de éste y, han puesto en órbita los satélites de comunicación y sondas espaciales que estudian continuamente el universo.

Lo anterior no se habría podido lograr sin las investigaciones realizadas por el hombre durante el transcurso de la historia, donde Isaac Newton jugó un papel preponderante con su descubrimiento y formulación de la Ley de gravitación Universal.

Antes de Newton existieron grandes pensadores y científicos que ayudaron a preparar el camino para este gran descubrimiento:

Aristóteles (384-322 a C) diferenciaba el mundo sublunar y el mundo de los astros. El mundo sublunar constituido por cuatro elementos: la tierra, el agua, el aire y el fuego, y atribuía a cada uno un movimiento rectilíneo, mientras que a los cuerpos celestes les atribuía un movimiento circular mantenido indefinidamente. La Tierra situada en el centro del universo es el único elemento “grave” sometido a la acción de la gravedad, por lo tanto, no se considera una cualidad universal (Torroja, 1961).

Claudio Ptolomeo (90 – 168 a C), proponía un universo esférico con la Tierra en el centro. Conocido por su obra el “Almagesto”, que fue iniciada por Apolonio. El modelo

de Ptolomeo considera que los planetas se mueven en círculos perfectos llamados epiciclos, su centro sigue siendo un círculo perfecto alrededor de la Tierra, el centro deferente no coincide con la posición de la Tierra y existe un punto ecuante fuera del planeta sobre el cual el deferente gira con movimiento circular uniforme (Torroja, 1961).

Figura 1: Modelo heliocéntrico de Copérnico (Figuras izquierda y centro) comparado con el modelo geocéntrico de Ptolomeo (figura derecha). “En el cosmos humanista secular cada pieza encaja como engranajes de un juego de ruedas”, tomado de W Brandmüller and E J Greipl, Copernico, Galilei e la Chiesa, Fine della controversia (1820) y gli atti del Sant' Uffizio (Florence, 1992).

Nicolás Copérnico (1473 -1543) astrónomo polaco, expone su nuevo sistema, el Sol es el centro del Universo, desempolvada del modelo propuesto por Aristarco de Samos (hacia 310 a.C. - hacia 230 a.C.) unos 1800 años antes, de un cosmos heliocéntrico, pero sigue manteniendo el sistema de deferentes y epiciclos, manteniendo las esferas, que en su movimiento arrastran los diversos planetas. La distancia de la Tierra al Sol es despreciable frente a la distancia de éste a las estrellas.

El concepto que tenía de la gravedad está consignada en su obra “De revolutionibus orbium ceslestium”. Dice “*Yo pienso que la gravedad o pesantez no es más que una cierta apetencia natural implantada en las partes por la divina providencia del Artesano universal con objeto que se unan en su unidad y en su totalidad y lo hacen en forma de globo*”. Dando lugar a pensar que tanto el Sol, la Luna y los planetas conservan la forma esférica, aunque efectúen movimientos circulares diferentes (Torroja, 1961).

Medio siglo después de la presentación del modelo de Copérnico con el Sol en el

centro, el astrónomo danés Tycho Brahe (1546 -1601), realizó muchas observaciones precisas, en particular de Marte, y vuelve al modelo geocéntrico donde la Tierra es el centro del Universo, donde la Luna y el Sol giraban alrededor de ésta, siendo a su vez el Sol el centro de las órbitas de los otros planetas (McKelvey, 1978).

El modelo geocéntrico de Tycho Brahe que se ilustra en la figura 2, tenía todos los planetas (excepto la Tierra) en órbita alrededor del Sol, pero el Sol orbitaba alrededor de la Tierra.

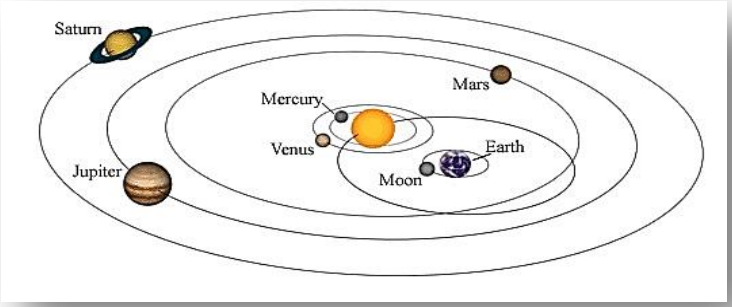


Figura 2: El modelo geocéntrico de Tycho Brahe el cual localiza la Tierra inmóvil en el centro, a su alrededor gira el Sol, en torno del cual giran todos los planetas.

Esta imagen fue tomada del siguiente link:

https://qph.is.quoracdn.net/main-qimg-e9c67ee88ccd3106ead023cc1c63ac4b?convert_to_webp=true

Johannes Kepler (1571 – 1630), de origen alemán, no solo se encargó del estudio de los astros, sino de muchos campos del conocimiento. Uno de los temas que más le preocupaba era el movimiento de los planetas, discípulo ferviente y continuador de la obra de Tycho-Brahe, el cual era poseedor de un observatorio. Esto permitió a Kepler estudiar la órbita de Marte (Torroja, 1961).

En una de sus obras, “Astronomia Nova” (1609), Kepler se refiere a la gravedad en su introducción de la siguiente manera:

“*Luego la nueva doctrina con relación a la gravedad se apoya en axiomas”*

“Toda sustancia corporal en la medida en que es corporal debe permanecer en reposo

en cualquier lugar en que se encuentra, aislada, fuera de la esfera en virtud de los cuerpos de su misma naturaleza"

"La gravedad es una relación corporal recíproca entre los cuerpos de la misma naturaleza para la unión y la conjunción (en cierta forma es la facultad magnética) de forma que la Tierra atrae hacia sí a la piedra mucho más que la piedra atrae a la Tierra"

"Los graves (si colocamos precisamente la Tierra en el centro del mundo) no son atraídos hacia el centro del mundo, sino en tanto que es el centro de un cuerpo redondo de su misma naturaleza a saber la Tierra"

"Si la Tierra no fuera redonda, los graves no serían atraídos en línea recta hacia el centro de la Tierra, sino que serían atraídos hacia puntos diferentes

"Si la Tierra dejara de atraer las aguas hacia sí, todas las aguas de los mares serían elevadas y fluirían hacía la Luna"

Kepler afirma que construyó toda su astronomía sobre las hipótesis de Copérnico, las observaciones de Tycho-Brahe y los estudios sobre el magnetismo realizados por el inglés William Gilbert (1544-1603), donde trata de justificar que el motor que da lugar al movimiento de los planetas está en el Sol y que esa acción producida podría estar expresada por una ley que más tarde fue enunciada por Isaac Newton, pero esta ley estaba implícita en las tres leyes enunciadas por Kepler.

La primera Ley de Kepler conocida como la ley de las órbitas se enuncia así:

"*La trayectoria de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los focos*".

La segunda Ley de Kepler, conocida como la "ley de las áreas", es la siguiente:

"Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales".

Se puede observar su simulación en el link:

https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_laws_of_planetary_motion#/media/File:Kepler-second-law.gif

La tercera Ley de Kepler, conocida también como ley armónica o de los periodos, dice:

"Los cuadrados de los períodos orbitales sidéreos de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol".

Matemáticamente, la primera Ley de Kepler se puede representar por la expresión en coordenadas cartesianas (x, y).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con centro C (0,0),} \tag{1}$$

donde a y b son respectivamente, el semieje mayor y el semieje menor.

En coordenadas polares, si r y θ se miden a partir del foco en lugar del centro C, las ecuaciones de la elipse son:

$$x = c + r\cos\theta \ \text{ y } \ y = r\,sen\theta \tag{2}$$

siendo c es la semidistancia focal se convierten en:

$$\frac{(c + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{r^2 sen^2\theta}{b^2} = 1 \tag{3}$$

operando las fracciones $b^2(c^2 + 2cr\cos\theta + r^2\cos^2\theta) + a^2r^2sen^2\theta = a^2b^2$ (4)

además, tenemos que $sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (5)

sustituyendo en la ecuación (4) se obtiene:

$$b^2c^2 + 2cb^2r\cos\theta + b^2r^2\cos^2\theta + a^2r^2 - a^2r^2\cos^2\theta = a^2b^2 \tag{6}$$

si $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$; $c = a\varepsilon$; $c^2 = a^2\varepsilon^2$ (7)

donde ε es la excentricidad, entonces se puede expresar la ecuación (6) en términos de a y ε del siguiente modo:

$$a^2(1 - \varepsilon^2)a^2\varepsilon^2 + 2a\varepsilon a^2(1 - \varepsilon^2)r\,cos\theta + a^2(1 - \varepsilon^2)\,r^2cos^2\,\theta + a^2r^2 - a^2r^2cos^2\,\theta$$

$$= a^2\,[a^2(1 - \varepsilon^2)] \quad (8)$$

dividiendo por $-a^2$ y realizando la respectiva simplificación se obtiene:

$$-r^2 + [\,\varepsilon\,r\,cos\theta - a\,(1 - \varepsilon^2)\,]^2 = 0 \quad (9)$$

las soluciones de r: $r = \pm\,[\varepsilon\,r\,cos\theta - a\,(1 - \varepsilon^2)]$ (10)

considerando las dos soluciones, cuando ε = 0 (órbita circular), los valores de r serán: $r \pm (-a)$, pero a siempre se considera positivo, entonces se toma $r = -a$ y se obtiene la ecuación:

$r = [\,a\,(1 - \varepsilon^2) - \varepsilon\,r\,cos\theta\,]$, donde $r + \varepsilon\,r\,cos\theta = a\,(1 - \varepsilon^2)$ (11)

factorizando $r(\,1 + \varepsilon\,cos\theta) = a\,(1 - \varepsilon^2)$ (12)

se obtiene $r = \dfrac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\,cos\theta}$ (13)

con esta ecuación, conociendo la medida del semieje mayor y la excentricidad, se pueden trazar las trayectorias de las órbitas de los planetas y satélites del sistema solar y de otros cuerpos celestes como los cometas (Weisstein, 1999).

Si $a = \dfrac{p}{(1-\varepsilon^2)}$ (14)

se tiene que $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\,cos\theta}$ (15)

donde p es parámetro focal que corresponde a la distancia de uno de los focos a la directriz o bien la relación de la mitad del lado recto y la excentricidad $p = \frac{l}{\varepsilon}$ donde l es la mitad del lado recto y ε es la excentricidad.

En la figura 3, se ilustra la trayectoria elíptica de un planeta y el Sol como uno de sus focos, se muestra en un sistema de coordenadas polares (r, θ), con su semieje mayor a y su semieje menor b, los dos focos marcados.

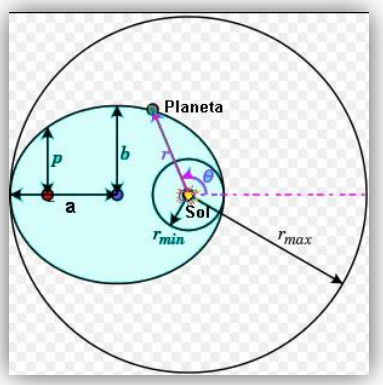


Figura 3: Trayectoria elíptica de un planeta alrededor del Sol.

Para su mínimo acercamiento $r = r_{min}$ el ángulo de posición actual del planeta corresponde a θ = 0° (perihelio) y para un máximo acercamiento $r = r_{max}$ el ángulo de posición del planeta es θ =180° (afelio).

Para la elipse 0<Ɛ<1, si Ɛ= 0 su trayectoria será un círculo con el Sol en el centro.

Para la segunda Ley de Kepler se considera $A(t)$ el área barrida en función del tiempo por el vector $\vec{X}(t)$, para cualquier t, s, $A(t+s) = hs$, donde h es constante, de tal forma que d$\vec{A}$/dt = es constante.

De acuerdo a la segunda Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, donde $\vec{F}$ es la fuerza, m es la masa del cuerpo y $\vec{a}$ es la aceleración, considerando que la aceleración del planeta se dirige hacia el Sol, es decir que es centrípeta y por lo tanto la fuerza ejercida también es centrípeta.

Si $\vec{X}$ es el vector de posición para el objeto, $\vec{V}$ es su velocidad y $\vec{a}$ es su aceleración, donde $\vec{a}$ es colineal con $\vec{X}$, $\vec{X} * \vec{A} = \vec{0}$.

La derivada $\frac{d}{dt}\ \left(\vec{X} * \vec{A} = \vec{0}\right) = \frac{dX}{dt}\ \vec{\vec{X}} * \vec{V} + \vec{X} * \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} * \vec{V} + \vec{X} * \vec{A} = \vec{0}.$ (16)

Se tiene que $\vec{X} * \vec{V}$ es un vector constante $\vec{H}$ o en el caso en que $\vec{H} = 0$, entonces $\vec{X}\ y\, \vec{V}$ son colineales y el movimiento va dirigido hacía el centro, de lo contrario $\vec{X}\ y\, \vec{V}$ siempre se encuentran perpendicular al plano, en consecuencia el movimiento es plano.

Si h es | $\vec{H}$ |; h es constante, se tiene $h = \left|\vec{X} * \vec{V}\right| = \left|\vec{X} * \frac{d\vec{X}}{dt}\right| = r^2\ \frac{d\vec{\theta}}{dt} = 2\ \frac{d\vec{A}}{dt}$ (17)

$r^2\ \frac{d\vec{\theta}}{dt} = 2\ \frac{d\vec{A}}{dt}$, donde $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\ r^2\ \frac{d\vec{\theta}}{dt}$ el área delimitada por la órbita elíptica es

$A = \pi ab$ y para los periodos T, $T\ \frac{1}{2}\ r^2\ \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \pi ab$; $r^2\, d\vec{\theta} = \frac{2\,\pi ab}{T}\ dt$ (18)

que da la segunda Ley de Kepler (Weisstein, 1999).

Otro científico que aportó al descubrimiento de la Ley de la Gravitación Universal fue Galileo Galilei (1564 – 1642), considerado el constructor del primer telescopio astronómico, el cual empleo para observar la Luna y las estrellas. Galileo sienta las bases de una nueva ciencia, la Dinámica, donde se utilizan conceptos como el de velocidad, aceleración, estableciendo las leyes de las caídas de los graves, además estudia el movimiento de los proyectiles señalando que su órbita es una parábola.

Descartes (1596 - 1650), plantea en esa época una nueva concepción sobre el Universo con su teoría de los torbellinos, donde el sistema solar es un torbellino girando alrededor del universo, es decir, su descripción del movimiento planetario se basa en colisiones dentro de vórtices hipotéticos, debatida posteriormente por Newton.

Christian Huygens (1624 - 1695) matemático, astrónomo y físico holandés, apoyado en las ideas de Descartes también abordó el tema de la gravedad, donde atribuye esto a la fuerza centrífuga que origina esta rotación de torbellinos y que es compensada por la fuerza centrípeta de las partículas, la cual es la gravedad.

Uno de los personajes más prolíficos de la época de Newton fue el científico Robert

Hooke (1635 -1703) físico y astrónomo inglés, miembro de la Royal Society, fue muy polémico con sus colegas ya que muchos de los inventos realizados por ellos eran copia de los realizados por él, como en el caso del reloj de espiral de Huygens. Con Newton tuvo problemas con la “hipótesis de la luz” la cual decía que era copiada de su obra “Micrographia” que había publicado antes, y lo mismo ocurrió con la teoría de la gravitación universal; sin embargo, fue uno de los personajes decisivos para que Newton formulara su teoría de la gravitación universal (Torroja, 1961).

Parafraseando a Torroja (1961) en su libro La gravitación Universal y sus consecuencias en uno de sus apartes se comenta que Hooke mantenía correspondencia con Newton, y uno de los problemas que trataron fue el de la extensión de la gravedad a las proximidades y en el interior de la Tierra, para lo cual hizo una serie de experiencias, y decía:

“*Si todas las partes de un globo terrestre fueran magnéticas, un cuerpo a considerable profundidad de la Tierra perdería parte de su gravedad, a causa de su atracción de las partes de la Tierra”.*

Hooke considera a la gravedad como la potencia que hace que los cuerpos de la misma naturaleza se muevan uno hacia el otro, hasta que se unan. Considera que esto se podría dar con el Sol y los planetas, pero no con los cometas, ya que estos eran de materia enrarecida y emitían luz; esto hace considerar a Hooke que la gravedad no era de carácter universal, cosa que sí demostró Newton.

Otros de los personajes que influyó mucho en el descubrimiento de su ley de gravitación universal fue el astrónomo inglés Edmund Halley (1646-1742) conocido por las observaciones y cálculos de la órbita del cometa que lleva su nombre.

Isaac Newton (1642 – 1727), considerado un físico, filosofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés, su obra más importante fue "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" fue presentada en la Royal Society en 1686 y publicada en 1687, considerada como la obra cumbre de la ciencia del siglo XVII, no solo resuelve los problemas que le plantea Halley acerca del estudio de los cometas, sino que también plantea la solución de los dos cuerpos dada la posibilidad de la existencia de

órbitas elíptica, hiperbólicas y parabólicas.

Con la obra “Principia”, Newton inicia el estudio de la teoría de la Luna y de la forma de la Tierra y además, con el planeamiento de la Ley de la gravitación universal, nacen nuevas ciencias como la Mecánica Celeste y la Geodesia.

2. Marco disciplinar

2.1 Ley de la gravitación universal

Las leyes de Newton junto con la ley de la gravedad son muy útiles para estudiar el movimiento de los planetas y los satélites, teniendo en cuenta que la fuerza de la gravedad es la que mantiene los cuerpos celestes como los planetas en sus órbitas, a su vez influyen sobre los cuerpos que se encuentran en la superficie de la Tierra.

La leyenda newtoniana la siguen relacionando con la anécdota de la manzana donde Newton comparó la manzana que cae con la Luna que cae, percatándose que si la Luna no cayese, se movería en una trayectoria recta alejándose de la Tierra; formuló la hipótesis de que la Luna no era sino un proyectil girando alrededor de la Tierra por la atracción de la gravedad (Marquina, 2005).

En una biografía de Newton escrita por su amigo William Stukeley, en 1752, donde cuenta que estando un día tomando el té en un jardín con Newton bajo unos manzanos, éste le dijo que "*fue justamente en la misma situación cuando por primera vez se le ocurrió el concepto de la gravitación, fue con ocasión de la caída de una manzana, cuando él estaba sentado con espíritu contemplativo*" (Holton, 1989).

Otra evidencia de esta posible anécdota la comenta Voltaire en sus "Elements de la philosophie de Newton" (1738) contada por la sobrina de Newton, "*Un día del año 1666 - escribe Voltaire - retirado Newton en la campaña y viendo caer frutos de un árbol, se dejó llevar, según me contó su sobrina, a una profunda meditación sobre la causa que atrae así a todos los cuerpos, obligándolos a seguir una línea recta que pasaría, si fuese prolongada, muy próxima del centro de la Tierra*" (Papp & Babini , 1954).

Newton estableció la relación entre la trayectoria rectilínea de la manzana y la trayectoria casi circular de la Luna, ésta gira alrededor de la Tierra y experimenta una aceleración centrípeta dirigida hacía su centro.

En la Figura 4 se ilustra como un objeto tal como una manzana cerca de la superficie de la Tierra, experimenta una aceleración g.

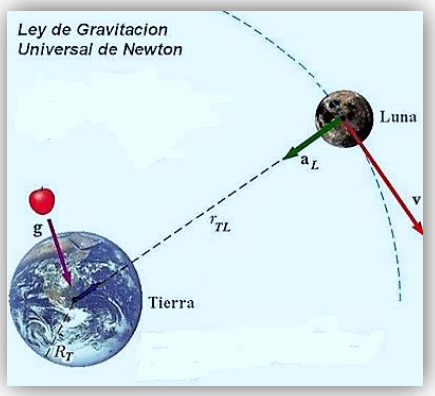


Figura 4: Relación entre la caída de un cuerpo y la Luna girando alrededor de la Tierra. Tomado de la Física de Raymond A, Serway A, sexta edición. Pág. 392.

En el tiempo en que vivió Newton siglo XVII, la utilización de los cañones por la Armada era muy común, esto lo llevó a imaginar y comparar el movimiento de la Luna con el de una bala de cañón disparada desde la cima de una montaña elevada ilustrada en la figura 5, se suponía que la cima estaba por encima de la atmósfera terrestre, para que la resistencia del aire no frenase el movimiento de la bala (Hernández, 1996).

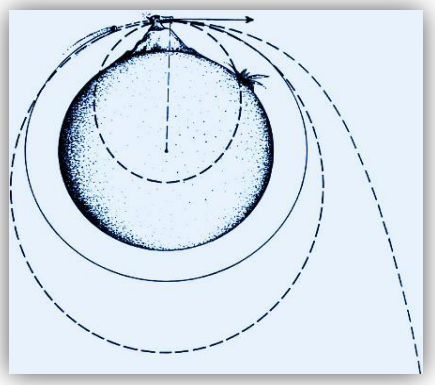


Figura 5: El satélite de Newton, representa las curvas que un cuerpo describiría si fuese proyectado en dirección horizontal desde la cima de una montaña. Si la velocidad inicial es pequeña, la órbita es una elipse. Tomada de Fundamental Astronomy, H. Karttunen. Quinta edición. Cap. 6. pág.123.

De acuerdo anterior, si una bala fuera disparada con una rapidez horizontal pequeña, describiría una trayectoria parabólica; si se va aumentando concluyó que la trayectoria se convertiría en un círculo y se movería durante un tiempo indefinido, es decir se pondría en órbita.

Entre más grande es la velocidad inicial con que se lanza un cuerpo, recorrerá una distancia mayor antes de caer nuevamente a la Tierra, si se incrementa la velocidad, debería seguir en el espacio sin tocarla (Hernández, 1996).

Para obtener una ecuación que permita medir la fuerza gravitatoria se supone que el Sol, de masa M atrae un planeta, de masa m, con una fuerza de módulo F, siendo r la distancia que separa los centros del Sol y el planeta. Si se tiene en cuenta la velocidad angular (w) y su periodo de revolución (T) alrededor del Sol, se tiene la aceleración centrípeta del planeta.

$$a_c = w^2 r \qquad (19)$$

Donde w es la velocidad angular, si $w = \frac{2\pi}{T}$ reemplazando $a_c = \frac{4\pi^2}{T^2}\ r$ (20)

De acuerdo a la Segunda Ley de Kepler: $T^2 = Kr^3$ donde T es el período, r es la distancia del Sol al planeta y K es una constante, sustituyendo en la ecuación (20) se obtiene:

$$a_c = \frac{4\pi^2\ r}{Kr^3} \quad ; \quad a_c = \frac{4\pi^2}{Kr^2} \qquad (21)$$

La fuerza con que el Sol atrae el planeta es, en módulo:

$$F = ma_c \ ; \ F = \frac{4\pi^2}{K}\frac{m}{r^2} \qquad (22)$$

puesto que $4\pi^2/_K$ es un valor constante, significa que la fuerza con el Sol atrae al planeta es directamente proporcional a la masa de éste e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el Sol y el planeta.

En otras palabras $F\ \alpha\ \frac{m}{r^2}$ (23)

el planeta atrae al Sol con una fuerza del mismo módulo y la fuerza F es directamente proporcional a la masa del Sol, tal como se expresa en la siguiente ecuación:

$$F\ \alpha\ \frac{mM}{r^2} \tag{24}$$

donde la fuerza gravitacional se puede definir como $\vec{F} = -\,G\,\frac{mM}{r^2}\,\hat{r}$ (25)

donde $\vec{F}$ es el vector fuerza gravitatoria, G es la constante gravitacional, m y M son la masa del planeta y el Sol respectivamente, r es la distancia que separa al Sol del planeta y es el módulo del vector $\vec{\boldsymbol{r}}$ que une la masa que genera la fuerza con la masa sobre la cual actúa, $\hat{r}$ es un vector unitario en la dirección de actuación de la fuerza aunque de sentido contrario. Por tanto la interacción gravitatoria entre dos cuerpos siempre se manifiesta como una pareja de fuerzas iguales en dirección y módulo pero con sentido contrario. El signo negativo manifiesta el carácter atractivo de la fuerza.

Esta ley es válida para calcular la fuerza con que se atraen entre sí los planetas y en general dos objetos físicos cualquiera.

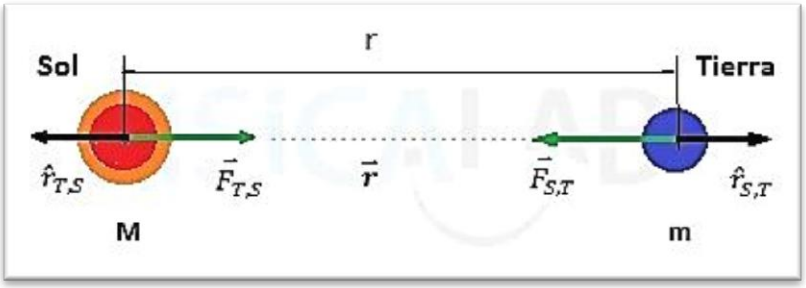


Figura 6: Fuerza de atracción entre dos cuerpos celestes.

Lo que Newton descubrió es que la gravedad era universal y que todos los cuerpos tiran uno de los otros en una forma espléndidamente simple en la que sólo intervienen la masa y la distancia. Cuanto mayor sean las masas, mayor será la fuerza de atracción que ejerce una sobre la otra. Además dedujo que la fuerza disminuye con el cuadrado de la distancia que separa los centros.

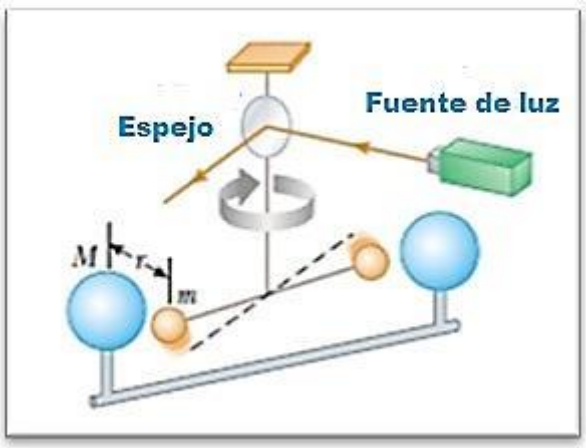


Figura 7: Diagrama de Cavendish para medir la constante gravitacional G. Las esferas más pequeñas de masa m son atraídas por esferas grandes de masa M, y la barra gira en un ángulo pequeño. Tomado de la Física de Raymond A, Serway A, sexta edición. Tomo. Pág. 393.

Sin embargo, esta ley cuantitativa explica el cómo pero no el por qué, pero se justifica ya que explica muy bien el movimiento de los cuerpos celestes.

Tuvieron que pasar casi cien años para determinar la medida de la constante G, la cual fue medida por primera vez por Henry Cavendish (1731-1810), por medio de una balanza de torsión, este valor de G correspondiente a $6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 / Kg^2, es muy pequeño ya que la atracción gravitacional entre los objetos comunes, es prácticamente despreciable, tal como se ilustra en la Figura 7, cuya animación se puede observar en la página Animations For Physic and Astronomy el siguiente link:

https://www.youtube.com/watch?v=vWlCm0X0QC0

2.1.1 Campo gravitatorio

Uno de los fenómenos que más han investigado los científicos y han tenido que utilizar la Astronomía y la Astrofísica es el del campo gravitatorio, hoy en día el trabajo realizado por la Agencia Espacial Europea y la Nasa han logrado mediciones locales con mucha precisión tanto en nuestro planeta así como en la Luna (Sánchez, 2014).

Se entiende aquí por campo como una región en el espacio con una serie de propiedades representadas por magnitudes físicas vectoriales o escalares, a los cuales se le asocia una estructura matemática para definirla.

Si la magnitud física es una fuerza, entonces se puede hablar de un campo vectorial de fuerzas; un campo gravitatorio es por tanto un campo vectorial de fuerzas cuya magnitud activa es la masa.

Es necesario tener en cuenta que la intensidad del campo gravitatorio "$\vec{g}$" y la aceleración de la gravedad "$\vec{a}$", son dos magnitudes que coinciden numéricamente, pero con significados diferentes. El campo gravitatorio $\vec{g}$ depende únicamente de la masa de nuestro planeta y la distancia entre el punto donde se calcula y el centro de la Tierra. El valor de la intensidad del campo gravitatorio (9,8 N/Kg), significa que en ese punto se coloca o sostiene un cuerpo, el mismo es atraído con una fuerza de 9,8 N por cada Kg de masa del cuerpo. El valor de la aceleración $\vec{a}$ de la gravedad (9,8 m/s^2) significa que si se lanza o se suelta un cuerpo, dicho cuerpo tiene un movimiento con aceleración vertical de ese valor, es decir, cuya velocidad se incremente verticalmente 9,8m/s en cada segundo transcurrido (Sánchez, 2014).

La intensidad del campo gravitatorio tiene un valor en cada punto haya o no masa, es decir, la aceleración con que la Tierra atrae cuerpos distintos cercanos a la superficie es diferente, mientras que la aceleración de la gravedad es la misma para todos ellos.

Si se considera un objeto de masa m en un punto de la superficie de la Tierra, suponiendo que es perfectamente esférica y su masa está distribuida homogéneamente y el radio r_T, la fuerza gravitacional estaría dada por:

$\vec{F} = G\,\frac{Mm}{{r_T}^2}\hat{r}$; teniendo en cuenta la segunda Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{g}$ que corresponde al peso $\vec{P}$.

Se pueden igualar $\vec{P} = m\vec{g} = G\,\frac{Mm}{{r_T}^2}\hat{r}$; al simplificar la masa m, $\vec{g} = G\,\frac{M}{{r_T}^2}\hat{r}$ (26), donde g = 9,8 m/seg^2, el cual corresponde a la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra.

El valor numérico de $\vec{g}$ variará de un punto a otro de la Tierra, debido a que ésta no es perfectamente esférica. Su valor es escalar, no es constante, ni es universal, a diferencia de la constante G, la cual es escalar, universal y constante.

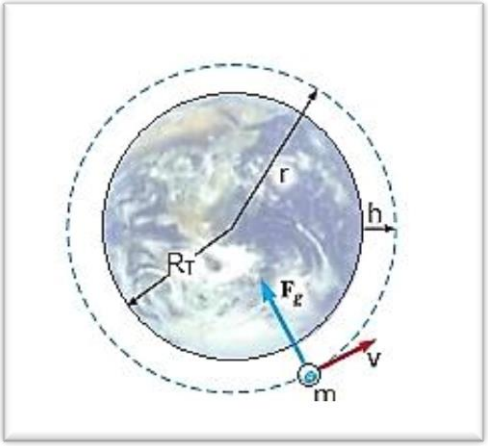


Figura 8: Un satélite de masa m moviéndose alrededor de la Tierra con una órbita circular de radio r con una velocidad constante v. La fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional. Tomada de la sección 13.5 The Gravitational Field Physics for Scientists and Engineers Raymond A. Serway. Sexta edición, 2004. Pág. 401.

Cuando un cuerpo se aleja una distancia h (grande) de la superficie de la Tierra como se observa en la Figura 8, la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre la masa está dada por:

$$\hat{F} = -G\,\frac{Mm}{(R_T+h)^2}\hat{r}\ . \qquad (27)$$

Por lo tanto la intensidad del campo gravitatorio estará dada por la expresión

$$\hat{g} = -G\,\frac{M}{(R_T+h)^2}\hat{r} \qquad (28)$$

A partir de la fuerza gravitacional se puede calcular la energía potencial gravitatoria y el potencial gravitatorio E_p, cambiando de signo el trabajo que el campo realiza sobre la masa cuando esta se traslada desde el infinito hasta dicho punto.

$$Ep(r) = -W_{\infty\to r} = \int_{\infty}^{r}\hat{F}\,d\hat{r} \qquad (29)$$

Integrando:

$$Ep(r) = -W_{\infty \to r} = -\int_{\infty}^{r} \hat{F}\, d\hat{r} = -\int_{\infty}^{r} -\frac{GMm}{r^2} dr = GMm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = GMm \left[\frac{-1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{GMm}{r}$$

$$-\frac{GMm}{\infty} = -\frac{GMm}{r} \qquad (30)$$

$Ep = -\frac{GMm}{r}$, esta representa la energía potencial del campo gravitatorio.

2.1.2 Consideraciones físicas que relacionan la Fuerza Gravitacional y el movimiento de los cuerpos celestes y terrestres.

Sea un cuerpo de masa *m* que se traslada alrededor de otro de masa *M,* y tales que *m* es considerablemente menor que *M.* Si el cuerpo *M* ocupa uno de los focos de la elipse descrita por *m,* y a es el semieje mayor de la órbita de éste, su velocidad de traslación *V* está dada por:

$$V^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (31)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de la energía.

El vector $\vec{r}$ se denomina radio vector, en este caso el cuerpo de masa m es un satélite del cuerpo de masa *M*, como es el caso de la Luna respecto de la Tierra, o de un planeta de masa m con relación al Sol, que se ilustra en la figura 9.

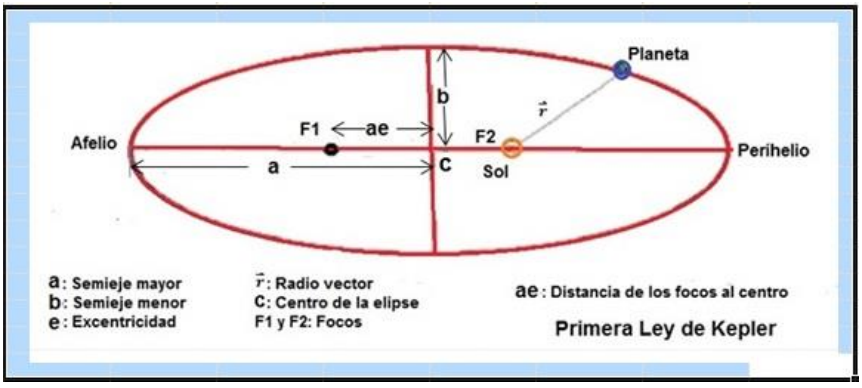


Figura 9: Órbita elíptica descrita por un planeta de masa m y velocidad V alrededor del Sol.

Si la órbita es parabólica, los cuerpos se alejan uno del otro pero también se pueden acercar entre sí. Reemplazando en (30) 1/a, resulta:

$$\mathrm{V}^2\mathrm{p} = G(M+m)2/r \qquad (32)$$

que se denomina, también velocidad de escape. Para la velocidad en una órbita circular donde:

$$a = r \quad , \quad \mathrm{V}^2\mathrm{c} = \mathrm{G}(\mathrm{M}+\mathrm{m})1/\mathrm{r} \qquad (33)$$

dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (32) y (33) se tiene:

$\frac{V^2p}{V^2c} = \frac{G(M+m)2/r}{G(M+m)1/r}$ Se tiene $\frac{V^2p}{V^2c} = 2$ *o sea* $V^2p = 2V^2c$ de aquí se puede determinar la velocidad parabólica o de escape, V_p para la misma órbita, teniendo en cuenta la velocidad circular.

Ahora bien, si el cuerpo es cualquiera de los satélites artificiales que giran alrededor de la Tierra, se mueve sobre una órbita elíptica de acuerdo con la fórmula (31), donde su masa es prácticamente despreciable y alcanza su máxima velocidad en el perigeo y la mínima en el apogeo, y se transforma en:

$$V^2 = G\mathrm{M}(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}) \qquad (34)$$

Si se tiene en cuenta que GM es un valor constante (K), para la Tierra su valor corresponde a:

$K = 3{,}99\, x\, 10^{14} Nm^2/Kg$, teniendo en cuenta que $G = 6{,}67\, x\, 10^{-11}\, N\, m^2/Kg^2$ y $M = 5{,}98\, x\, 10^{24} Kg$ que es la masa de la Tierra. El valor de k depende de la masa del planeta pero no de la de cada satélite, en el caso del Sol y los planetas su valor depende solo de la masa del Sol.

Analizando la situación cuando se desplaza desde el perigeo hacia el apogeo, el radio vector r aumenta de valor y, de acuerdo con la fórmula (34), la velocidad V disminuye. En cambio cuando se desplazamiento es del apogeo al perigeo, el radio vector r disminuye y, la velocidad V aumenta.

Un caso particular de una elipse es una circunferencia, donde el radio vector r es igual al semieje mayor, o sea r =a = R_T, siendo R es el radio de la circunferencia. Por tanto

$$V_c{}^2 = KR_T \tag{35}$$

y si la trayectoria es una parábola, el semieje es infinito, o sea 1/a =0; y como r = R_T, distancia al centro de la Tierra, se tiene que:

$$V_p{}^2 = {}^{2k}/_{R_T} \tag{36}$$

La velocidad mínima o de escape que el objeto o proyectil que debe tener para escapar de la influencia del campo gravitacional de la Tierra, teniendo en cuenta la ecuación (36), considerando a $K = GM$ la velocidad parabólica o de escape se expresa así:

$$V_p = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \tag{37}$$

Si se lo aplicamos a la Tierra con un radio $R_T = 6{,}37\ x\ 10^6 m$ y un satélite de masa despreciable m, que debe ser lanzado al espacio, la velocidad de escape será aproximadamente de 11,2 Km/s; si el satélite se encontrara a una altura h = 5000 m sobre la superficie de la Tierra, la velocidad de escape disminuye ya que $r = R_T + h$ que corresponde a $r = 11{,}37\ x\ 10^6\ m$ y la velocidad de escape es aproximadamente 8,4 Km/s.

En la tabla 1, además de las características particulares de cada uno de los planetas, se ilustra la velocidad de escape, en Km/s, de los planetas.

PLANETAS DEL SISTEMA SOLAR	Mercurio	Venus	La Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Diámetro (La Tierra=1)	0.382	0.949	1	0.532	11.209	9.44	4.007	3.883
Diámetro(Kilómetro)	4.878	12.104	12.756	6.787	142.800	120.000	51.118	49.528
Masa(La Tierra=1)	0.055	0.815	1	0.107	318	95	15	17
Distancia excéntrica desde el Sol(UA)	0.39	0.72	1	1.52	5.20	9.54	19.18	30.06
Período orbital(años de la Tierra)	0.24	0.62	1	1.88	11.86	29.46	84.01	164.8
Excéntricidad orbital	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934	0.0483	0.0560	0.0461	0.0097
Velocidad orbital excéntrica(Kilómetros/segundos)	47.89	35.03	29.79	24.13	13.06	9.64	6.81	5.43
Período de rotación(en díasTerrestres)	58.65	-243*	1	1.03	0.41	0.44	-0.72*	0.72
Inclinación del eje(grados)	0.0	177.4	23.45	23.98	3.08	26.73	97.92	28.8
Temperatura estimada de la superficie(C)	-180 to 430	465	-89 to 58	-82 to 0	-150	-170	-200	-210
Gravedad en el Ecuador (La Tierra =1)	0.38	0.9	1	0.38	2.64	0.93	0.89	1.12
Velocidad de escape (kilómetros/segundo)	4.25	10.3`	11.18	5.02	59.54	35.49	21.29	23.71
Densidad estimada (agua=1)	5.43	5.25	5.52	3.93	1.33	0.71	1.24	1.67
Composición atmosférica	ninguna	CO_2	N_2+O_2	CO_2	H_2+He	H_2+He	H_2+He	H_2+He
Número de Lunas	0	0	1	2	63	62	27	13
¿Anillos?	no	no	no	no	si	si	si	si

Tabla 1: Características principales de los planetas del Sistema solar. Tomado del portal "Windows to the universe presentado por la NESTA (National Earth Science Teachers Association"), tomado del vínculo siguiente:

http://www.windows2universe.org/our_solar_system/planets_table.html&lang=sp

3. Descripción de la propuesta didáctica

Actualmente las ciencias avanzan a pasos de gigante, lo cual requiere que los procesos educativos iniciales de los estudiantes estén acorde con este proceso continuo de transformación conceptual y avance investigativo. Pero en la realidad, debemos aceptar que muchos de los conceptos trabajados en el aula se encuentran desactualizados y descontextualizados, en especial en las actividades prácticas, exploratorias y vivenciales.

Una de las disciplinas más interesantes para la humanidad ha sido la Astronomía. Desde la antigüedad el ser humano se ha interesado por entender el mundo desde el estudio de los astros y ha tenido un gran avance en el campo de los viajes espaciales y exploración del universo.

Por ello la Astronomía, es un área de estudio que permite la interdisciplinariedad en el aula de clase, y se convierte en un espacio para evidenciar y aplicar conceptos básicos de las Matemáticas y la Física. Así mismo, genera motivación y curiosidad en los estudiantes, elementos claves para el aprendizaje por proyectos.

3.1 Contexto institucional

La propuesta surgió de la necesidad de fortalecer áreas como la Física y la Matemáticas en la institución educativa Colegio Isabel Valbuena Cifuentes, del municipio de Vélez, Santander, el cual cuenta con tres jornadas y un número aproximado de 1250 estudiantes, con 550 estudiantes en la sección secundaria. El grupo de estudiantes con el cual se trabajarán las actividades de Gravitación Universal, son escogidos del grado décimo y undécimo integrado por 30 estudiantes.

3.2 Estrategia didáctica

3.2.1 Aprendizaje por proyectos

Es una estrategia de educación integral donde el docente se enfrenta a estudiantes con diferentes estilos de aprendizaje, niveles académicos y conceptuales, etnias, creencias y culturas; donde busca desarrollar habilidades científicas (observar, describir, argumentar, planear, experimentar etc.) a partir del trabajo colaborativo y grupal, permitiendo a los estudiantes la autonomía en su aprendizaje, desde la responsabilidad y compromiso.

El aprendizaje basado en proyectos, se fundamenta en el constructivismo de Piaget, Dewey, Bruner y Vygotski, donde se mira el aprendizaje como el resultado de construcciones mentales previas de los seres humanos. Una de las características es la oportunidad de involucrar un trabajo interdisciplinario, el cual propicia indagar en los estudiantes sus intereses y así poder desarrollar proyectos que generen aprendizaje significativo (Díaz, 2006)

El aprendizaje basado en Proyectos es un modelo de aprendizaje en el que los docentes planean, implementan y evalúan proyectos que tienen aplicación en el mundo real más allá del aula de clase (Blank, 1997); (Dickinson, Soukamneuth, & Yu, 1998); (Harwell, 1997).

Los proyectos de aula generan motivación en los estudiantes, donde se registra un aumento en la asistencia a la escuela, mayor participación en clase y mejor disposición para realizar las tareas (López, 2014).

Se da la opción de involucrar a dos o más aulas, en que los estudiantes de cada una participan como un solo equipo, donde se asume una responsabilidad particular. Se pueden formar sub-equipos para realizar tareas, pero se hace énfasis en que todos deben colaborar para que el reto asignado a su aula sea cumplido con éxito (Ortiz, 2003).

En cuanto al docente en la aplicación de la estrategia, es quien guía el proceso de aprendizaje del grupo, estimula a los estudiantes a lograr un nivel más profundo en la comprensión de los problemas, asegurándose de que todos los estudiantes participen de manera activa, promueve que piensen y actúen con base en el diseño de un proyecto (Díaz, 2006).

Entre otras características, el aprendizaje por proyectos permite que los estudiantes establezcan una relación entre los conocimientos adquiridos en la escuela y la realidad. Adquieren una mayor comprensión de los conceptos y desarrollan habilidades cuando son proyectos estimulantes (Blank, 1997); (Bottoms, 1998); (Reyes, 1998).

Esta estrategia incentiva la colaboración mutua que les permite compartir ideas entre ellos, expresar sus propias opiniones, dar y negociar posibles soluciones a una situación problema (Bryson, 1994); (Reyes, 1998).

Esta propuesta permitirá a los docentes de Física y Matemáticas de educación media, utilizar la Astronomía como recurso motivador para explicar de una manera didáctica los temas que conduzcan a comprender significativamente la Fuerza Gravitacional, de tal forma que el estudiante llegue a conclusiones de cómo el movimiento de los cuerpos celestes se rigen por este concepto.

3.3 Metodología

La metodología de esta propuesta toma elementos del aprendizaje activo cuya estrategia didáctica es el aprendizaje por proyectos, enfatizando los siguientes aspectos:

- Un currículo centrado en el estudiante.
- Buscar favorecer la comprensión de los conceptos.
- Fortalecer el papel del docente como gestor y retroalimentador del proceso de aprendizaje.

- Incorporación de objetivos, estrategias y recursos orientados a lograr aprendizajes significativos de los contenidos curriculares y aprender a aprender promoviendo la actividad autónoma del estudiante.

Así mismo, desde los contenidos, esta propuesta pretende:

- Un enfoque interdisciplinario de la Astronomía desde la Matemática y la Física.
- Asegurar la relevancia y pertinencia de los contenidos (secciones cónicas y las órbitas elípticas, la fuerza gravitacional, movimientos de los satélites, Leyes de Kepler, características de los planetas, observación de los cuerpos celestes, movimiento parabólico, cañón de Newton, velocidad de escape).

Para el diseño, implementación y análisis de resultados del proyecto, se llevaron a cabo las siguientes fases:

Fases	Actividades
Fase I: Revisión bibliográfica	• Indagar, comparar, analizar las fuentes de información acerca de aspectos disciplinarios y epistemológicos de la Ley de Gravitación universal. • Construcción del marco epistemológico y conceptual de la propuesta de aula.
Fase II: Valoración del impacto de los avances científicos en astronomía	• Motivar al estudiante a investigar acerca del impacto que ha ocasionado el descubrimiento de la teoría de Fuerza Gravitacional, en los avances científicos relacionados con la exploración del espacio. • Desarrollo de prácticas de observación astronómica en Villa de Leyva (Ver tercera sesión del segundo proyecto de aula, anexo C).
Fase III: Diseñar proyectos de aula sobre el movimiento de planetas, satélites y	• Diseño de tres (3) proyectos de aula secuenciales y direccionados: construyendo órbitas elípticas de los planetas, la fuerza de gravitación universal y el movimiento de los planetas y satélites, y el satélite de Newton y el movimiento de la Luna (Ver anexo B, C y

proyectiles.	D).
Fase IV: Implementación de proyectos de aula.	• Cada proyecto de aula tiene una descripción, objetivos generales y específicos, metodología, cronograma de actividades, fases de desarrollo con varias sesiones donde se plantean preguntas problemas reforzadas con ejemplos y ejercicios propuestos. Los estudiantes participan en exposiciones en ambientes adecuados, y prácticas dentro y fuera del aula de clase, con tiempo presupuestado, adecuación de recursos; en algunos casos, incluye miembros del equipo, expertos, miembros de la comunidad. En cuanto a la evaluación, se valora el desempeño del proceso y el producto final de los estudiantes.

Cuadro 1: Fases del diseño, implementación y análisis de resultados del proyecto.

La puesta en marcha de los proyectos de aula pretende evaluar los resultados de dicha propuesta con la potencialización de determinadas competencias, actitudes y procedimientos que permitan la apropiación significativa de los saberes propios de las ciencias, teniendo en cuenta los estándares curriculares que involucran temáticas relacionadas con el estudio de la fuerza gravitacional. Algunas de estas actividades se realizaron en espacios libres donde el estudiante hizo uso de su creatividad y aplicó los conocimientos teóricos.

4. Diseño y ejecución de la propuesta didáctica

Los proyectos de aula se ejecutan en diferentes etapas y sesiones, en los que el estudiante es el principal protagonista. Se conforman grupos de estudiantes previamente preparados por el docente para ser monitores que generalmente son estudiantes de undécimo grado. Cada uno de ellos toma un grupo de compañeros de décimo grado para guiarlos en las actividades a realizar. Durante el desarrollo de las actividades el docente será guía y al mismo tiempo interviene como expositor.

4.1 Diagnóstico

4.1.1 Primera prueba diagnóstica

Tema: Análisis de una prueba diagnóstico (ver anexo A), sobre los saberes previos figuras circulares y elípticas, cuestionamientos relacionados con diferentes situaciones en relación con el movimiento de los astros y la fuerza gravitacional.

Diagnóstico: El análisis tuvo en cuenta ciertas habilidades que deben desarrollar los estudiantes en su proceso cognitivo, como la capacidad de observación, comparación, medición, predicción descripción, cálculos entre otras; se encontraron unos porcentajes bajos, pero, en este caso, son muy significativos, porque nos arroja información acerca de estudiantes que presentan problemas en su proceso de aprendizaje. La prueba diagnóstica se realizó a 30 estudiantes, 16 mujeres y 14 hombres.

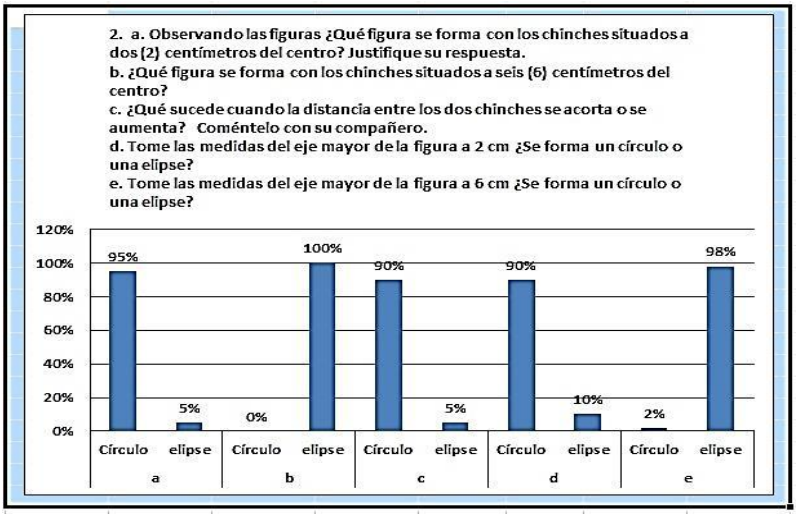
A continuación en el cuadro 1, se realizará un estudio de este diagnóstico focalizando el problema, sus necesidades, los intereses y/o sus acciones para esos estudiantes que no alcanzaron los niveles satisfactorios, reforzando también a los que estuvieron en un nivel aceptable.

1. ¿Quién de los siguientes personajes realizó un estudio exhaustivo de las curvas cónicas al seccionar un cono con un plano, cuya obra se conoce con el nombre de "Las cónicas", resumida en ocho libros?		
PROBLEMA	**NECESIDADES**	**INTERESES Y/O ACCIONES**
1. En el diagnóstico se observó que los estudiantes presentaban confusión en quién fue el que describió las cónicas utilizando un cono, un 60% lo atribuyó a Kepler, un 20% a Nicolás Copérnico, un 20% a Apolonio de Pérgamo y 0% a Descartes. ¿Cuál sería una forma adecuada para que el estudiante logre establecer relaciones entre el movimiento de los planetas, cuerpos celestes y las trayectorias elípticas y circulares?	1.1 El problema de algunos estudiantes, es que les cuesta trabajo relacionar los conceptos teóricos con la realidad de su entorno. 1.2 Las necesidades y los intereses de los estudiantes no llenan las expectativas, hay que tratar en lo posible que el tema sea de interés a la mayoría y no a unos pocos.	1.1. Realizar la práctica primero y luego tratar de que ellos relacionen lo observado con los conceptos teóricos, de esa forma se aprovechan los métodos de aprendizaje con procesos Metacognitivos. 1.2 Es importante que el docente actúe de mediador durante el proceso y se vaya induciendo al estudiante al objetivo de la práctica, pero sin que se sienta obligado a decir lo que piensa el docente.

2. **Realice el siguiente procedimiento utilizando una hoja de papel de oficio cuadriculado y un cartón de base.** De acuerdo al proceso realizado con los dos chinches y un hilo. a. Observando las figuras ¿Qué figura se forma con los chinches situados a dos (2) centímetros del centro? Justifique su respuesta. b. ¿Qué figura se forma con los chinches situados a seis (6) centímetros del centro? c. ¿Qué sucede cuando la distancia entre los dos chinches se acorta o se aumenta? Coméntelo con su compañero. d. Tome las medidas del eje mayor de la figura a 2 cm ¿Se forma un círculo o una elipse? e. Tome las medidas del eje mayor de la figura a 6 cm ¿Se forma un círculo o una elipse?		
PROBLEMA	**NECESIDADES**	**INTERESES Y/O ACCIONES**
1. En el diagnóstico de la pregunta a., se observó que los estudiantes contestaron que la figura que se forma con los chinches a 2 cm era un circulo en un porcentaje del 95%. El diagnóstico de la pregunta b., para la figura realizada con los chinches a los 6 cm contestaron en un 100% que era una elipse. La respuesta para la pregunta c., en un 90% dice que cuando la distancia entre los chinches es corta dice que es un círculo y cuando se alarga es una elipse. La respuesta para la pregunta d., después de haber medido los ejes, 90% insiste que la figura que se forma es un círculo. La respuesta para la pregunta e., después de haber medido los	1.1 Muchas veces las personas en general no solamente nuestros estudiantes, presentan dificultades en la percepción en forma más precisa y detallada de lo que observamos, y hacemos mal uso de la información percibida por nuestros sentidos. 1.2 Algunos estudiantes que presentan falencias en el proceso de toma de medidas, tal vez en este caso no tomaron lo más preciso los datos, utilizaron mal la regla, o simplemente pudieron tener problemas físicos de vista. 1.3 Hay conceptos que no han sido significativos para los estudiantes. Esto se puede deber a problemas de atención, u otros	1.1 Realizar actividades que ayuden a afinar la percepción de nuestros sentidos, realizando ejercicios muy prácticos de interés para el mismo estudiante y así, mejorar la capacidad de observación de nuestros estudiantes. 1.2 Realizar algunas actividades de medición con diferentes elementos, regla, metro, transportador, toma de medidas con compas, para afianzar el concepto de medición. 1.3 Tomar mediciones a las

ejes, un 98% dijo que se forma una elipse. ¿Cómo mejorar la capacidad de observación en los estudiantes? ¿En qué forma el alumno puede afianzar el concepto de círculo? ¿Cómo afianzar el concepto de medición en la construcción de la elipse?	factores de aprendizaje asociados al estudiante o al mismo docente, que han impedido que los comprendan y lo memoricen.	figuras circunferenciales de su entorno con diferentes radios para afianzar el concepto de círculo, utilizando el aprendizaje holístico, es decir, saber haciendo.
3. Aproveche la construcción de la figura realizada con los chinches alejados 6 cm del centro, localice los puntos que se muestra en la figura 2, e identifique sus elementos.		
PROBLEMA	**NECESIDADES**	**INTERESES Y/O ACCIONES**
1. En el diagnóstico 45% de los estudiantes identificaron parcialmente los elementos de la elipse. ¿Cuáles serían las dificultades para identificar correctamente los elementos de la elipse y llegar a su concepto?	1.1 En algunos estudiantes no hay comprensión de las definiciones de los elementos de la elipse. 1.2 No asocian la información dada con el tema. 1.3 Se hace necesario explicar el proceso identificando primero cada elemento en la figura.	1.1 Se realizan actividades donde se construyen las gráficas de elipses, situando sus elementos con nombres propios. 1.2 Se pregunta a los estudiantes el concepto o significado de los elementos de la elipse con base a su localización en la figura, expresado con sus propias palabras.
4. ¿Es posible elaborar las órbitas de los planetas y satélites utilizando ecuaciones de las cónicas geométricas? explica la respuesta y coméntalo con tu compañero(a).		
PROBLEMA	**NECESIDADES**	**INTERESES Y/O ACCIONES**
1. Un 70% del grupo contestaron que sí, sin embargo, ninguno justicó su respuesta. ¿Cuál sería una forma adecuada para que el estudiante logre utilizar las ecuaciones cónicas para trazar las trayectorias de los planetas y otros cuerpos celestes?	1.1 La dificultad de muchos estudiantes es establecer relación entre los conceptos físicos tratados en nuestro entorno terrestre y los fenómenos que se suceden en el espacio exterior. 1.2 La falta de conocimiento de algunos docentes y estudiantes en cuanto al tema de la Astronomía y su relación transversal con otras áreas como la Física y las Matemáticas, deja grandes vacíos en cuanto a la aplicabilidad de los conceptos teóricos.	1.1 Realizar prácticas de aula y de campo donde el estudiante sea el mismo que saque sus propios conceptos acerca de los fenómenos físicos y los relaciones con otros, es propio del aprendizaje activo. 1.2 Se hace necesario la interdisciplinariedad de los conceptos de la Física y La Matemática con otras áreas del conocimiento, como la Astronomía.

Cuadro 2: Análisis de la primera prueba diagnóstica realizada a estudiantes de grado décimo.



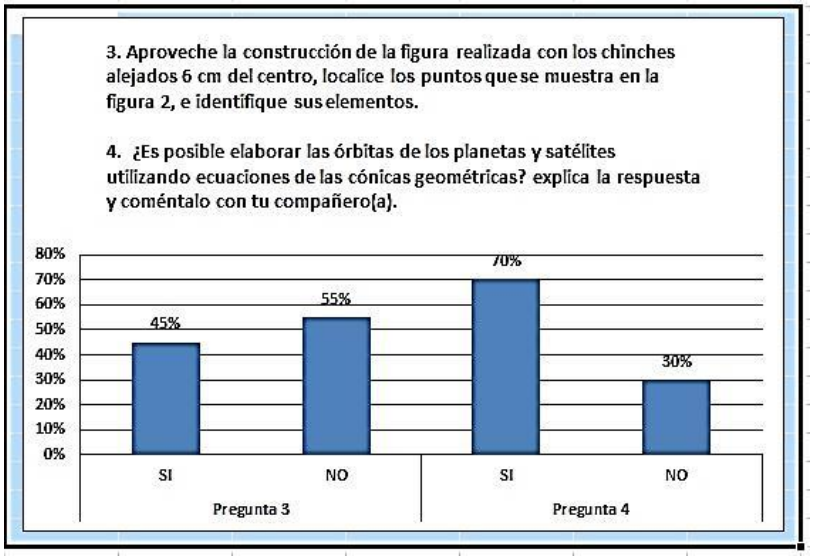
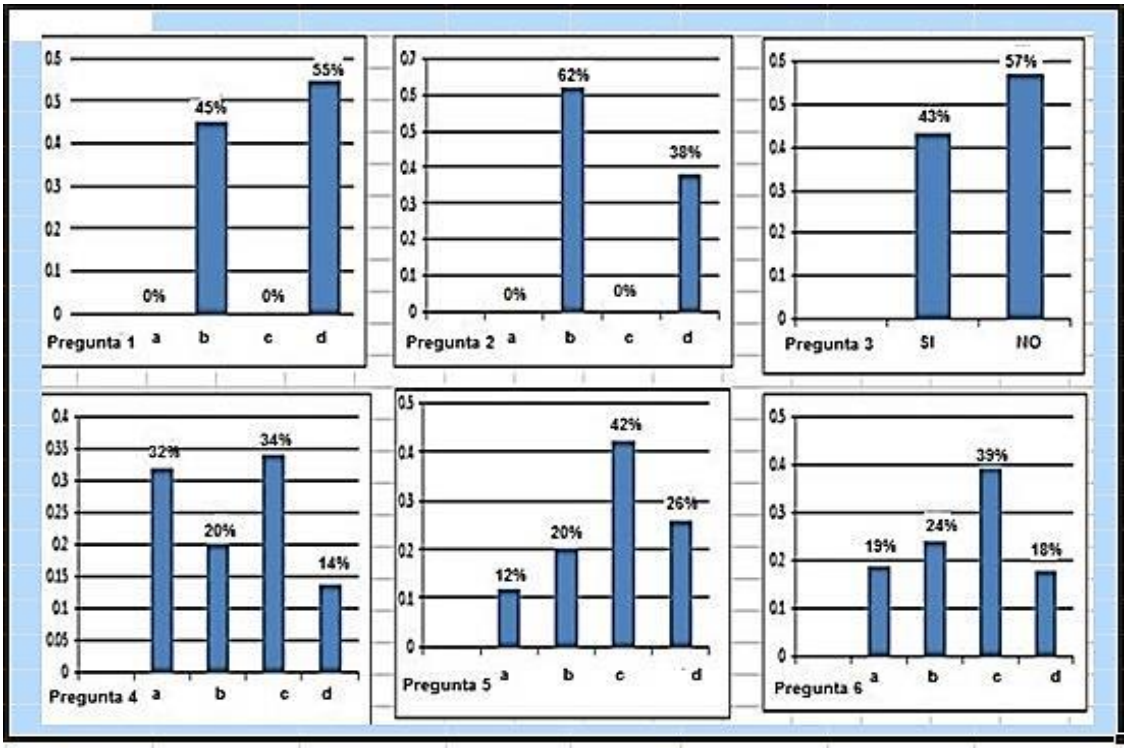


Figura 10: Resultados estadísticos de la primera prueba diagnóstica realizada a estudiantes de décimo grado.

4.1.2 Segunda prueba diagnóstica

Tema: Análisis de una prueba diagnóstico acerca de los saberes previos sobre la Ley de la Gravitación Universal, con situaciones problemas donde el estudiante debe utilizar el concepto para poder darles solución.

Diagnóstico: En este diagnóstico se les evalúo a los estudiantes algunos conocimientos previos relacionados con la Ley de la Gravitación Universal, los resultados se muestran a continuación:



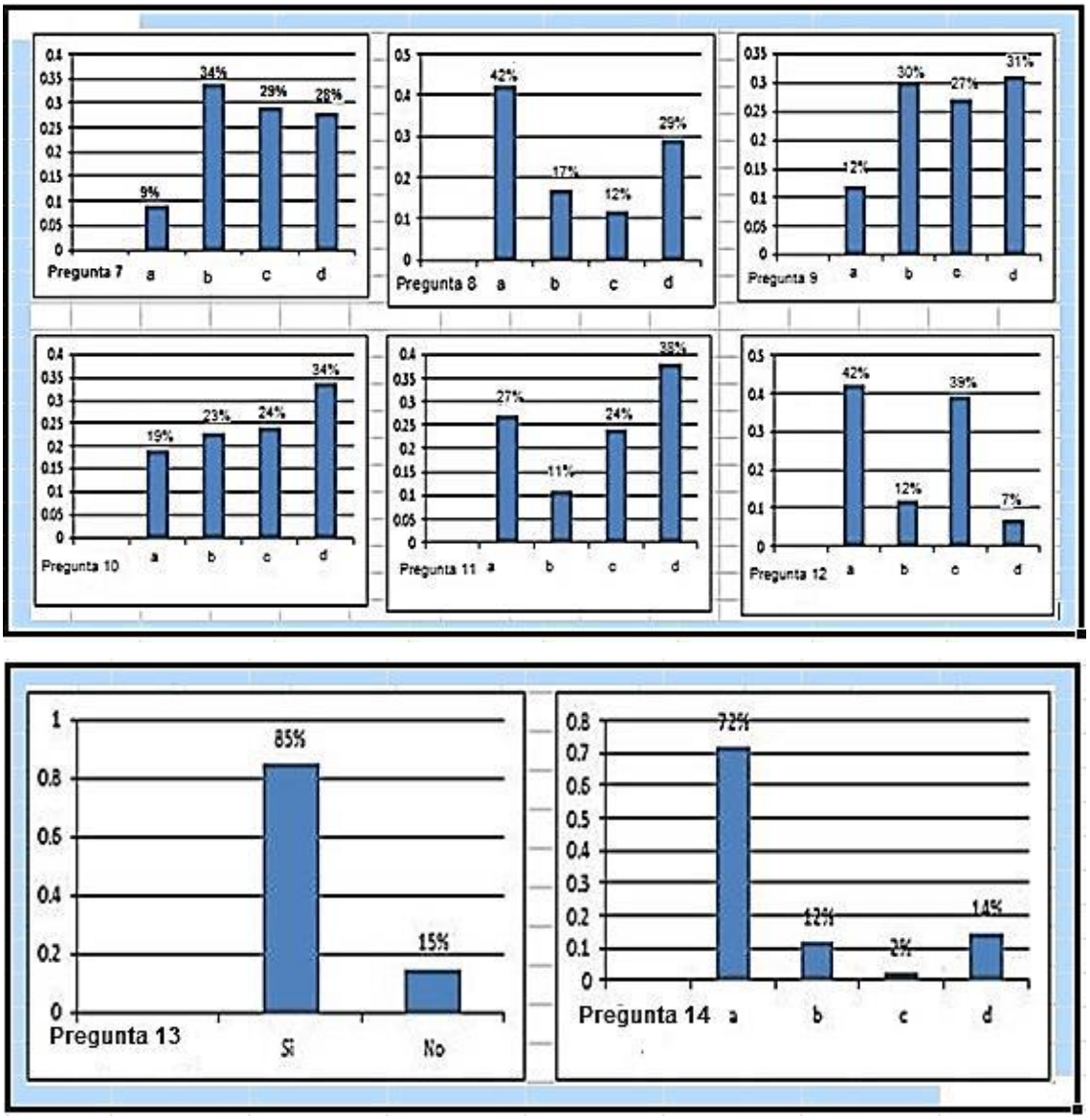


Figura 11: Resultados estadísticos de la segunda prueba diagnóstica realizada a estudiantes de décimo y undécimo grado.

N°	Preguntas correctas	Preguntas incorrectas	Observaciones
1	55%	45%	Un 45% todavía desconoce que las leyes elaboradas por Newton son: La ley de Inercia, la ley del movimiento y la ley de acción y reacción; además, de las anteriores a él se debe el descubrimiento de la ley de la Fuerza Gravitacional.
2	62%	38%	Se observa que un 38% desconoce aún las unidades

			de la aceleración de la gravedad.
3	57%	43%	Un 43% desconoce que la aceleración de un cuerpo no depende de la masa del cuerpo.
4	32%	68%	Un 32% sabe que la fuerza que actúa sobre una masa cualquiera en un conjunto de masas, es la suma vectorial de las fuerzas.
5	42%	58%	Solo un 42% sabe el valor de la constante de gravitación universal.
6	39%	61%	Un 39% sabe que la aceleración de caída de un cuerpo se puede determinar, al igualar las ecuaciones de gravitación universal y la segunda ley dinámica de Newton.
7	28%	72%	Un 28% sabe que todas las opciones son correctas.
8	42%	58%	Un 42% conoce la fórmula de La Ley de la gravitación universal.
9	30%	70%	El 30% sabe que la distancia entre dos cuerpos se mide entre sus centros.
10	24%	76%	Tan solo un 24% conocía la expresión matemática de la fuerza gravitacional.
11	27%	73%	Solo un 27% calculó el valor de la gravedad.
12	39%	61%	Un 39% conocía las características de un satélite geoestacionario.
13	85%	15%	El 85% contestó que sí, pero no lo justificaron cuando se le preguntó el por qué.
14	No aplica		Pregunta con muchas alternativas de respuestas.

Cuadro 3: Análisis de la segunda prueba diagnóstica realizada a estudiantes de grado décimo y undécimo

4.2 Diseño de los proyectos de aula

De acuerdo a los resultados de las dos pruebas diagnósticas se elaboraron tres proyectos de aula que giran en torno al tema de gravitación universal.

El primer proyecto fue: “construyendo órbitas elípticas de los planetas”, se diseñó para

dar solución a las debilidades presentadas en los resultados obtenidos de la primera prueba diagnóstica y está encaminado a familiarizar al estudiante con la construcción de las trayectorias circulares y elípticas, con el propósito de establecer su relación con el movimiento de los cuerpos celeste, en especial, los planetas y satélites del sistema solar.

De acuerdo con los resultados obtenidos de la segunda prueba diagnóstica se elaboraron otros dos proyectos de aula, con el fin de reforzar las dificultades presentadas con los conocimientos previos relacionados con la ley de la gravitación universal.

En segundo proyecto de aula se denominó "la fuerza de gravitación universal y el movimiento de los planetas y satélites", que consta de tres sesiones. En una primera sesión se estudian los principios que rigen la fuerza de la gravitación universal cuyos objetivos están relacionados en conocer el principio de gravitación universal; con base en éste, dar solución a situaciones problema haciendo uso de ecuaciones, que conduzcan al estudiante a relacionar el movimiento de los planetas y satélites con dicho principio.

La segunda sesión denominada "construcción de un planetario visto desde un ambiente lunar", el cual se hizo en varias etapas y cuyo objetivo fue motivar a los estudiantes de grado décimo y undécimo a diseñar y construir un planetario incentivando su creatividad e ingenio, con el propósito de crear un ambiente adecuado en donde ellos(as) realizarán exposiciones, relacionados con la fuerza gravitacional y las características principales de los planetas y satélites del sistema solar.

Complementado con una tercera sesión práctica denominada "una caminata espacial para observar los cuerpos celestes" se llevó a cabo en el observatorio astronómico de Zaquencipa localizado en el municipio de Villa de Leiva, con el fin de observar el movimiento de los cuerpos celestes y la observación directa del Sol y la Luna.

Antes de la práctica se motivó a los estudiantes a investigar acerca de las características principales del Sol, la Luna, los planetas y sus principales satélites, así mismo, acerca de los viajes espaciales realizados a la Luna; lo anterior, con el

propósito de llevar a cabo el objetivo específico de valorar el impacto de los avances científicos en la exploración del espacio y su relación con la fuerza gravitacional.

Un tercer proyecto de aula denominado “el satélite de Newton y el movimiento de la Luna” que complementa el anterior objetivo, es el relacionado con el lanzamiento de proyectiles hidráulicos y mecánicos con el cual se persigue estudiar la trayectoria de los cuerpos sobre la superficie terrestre y recrear el satélite de Newton relacionándolo con el movimiento de la Luna y satélites artificiales.

Los proyectos de aula están diseñados para estudiantes de grado décimo y undécimo. Cada taller comprende los siguientes aspectos.

a) Nombre del proyecto.

b) Descripción del proyecto: Es una explicación concisa del objetivo último del proyecto y de qué manera se va a dar solución al problema.

c) Justificación: Pretende dar solución al problema planteado, su contribución, que forma va a beneficiar a los estudiantes, qué utilidad y novedad tiene el proyecto.

d) Objetivos: Es lo que se quiere lograr en los estudiantes, o que los estudiantes aprendan.

e) Metodología: Es la forma como se debe trabajar cada taller para lograr el objetivo propuesto en el mismo.

f) Cronograma de actividades: Se encuentran las actividades con las que se pretende cumplir los objetivos del proyecto, la fecha en que se realizan y los responsables.

g) Fases de desarrollo: Donde se describen cada una de las actividades programadas, llevándose a cabo en diferentes etapas, sesiones. Cada actividad se desarrolla teniendo en cuenta el tiempo programado, objetivos, recursos,

procedimiento, ejecución de las actividades y cerrando con la evaluación de éstas.

h) Ejecución de los proyectos de aula: Es llevar a cabo cada una de las actividades programadas de acuerdo a la planeación, recursos y equipo de trabajo con la dirección del docente.

i) Evaluación del proyecto:

1. **Evaluación del primer proyecto "Construyendo órbitas elípticas de los planetas" (ver anexo B).**

Constituido por tres sesiones en las que se evaluaron los objetivos de las diferentes actividades.

- En la primera sesión se realizó una autoevaluación de los dos videos que buscaban motivar a los estudiantes a conocer la historia de los personajes que estudiaron las trayectorias elípticas de los cuerpos celestes y luego sus comentarios fueron socializados al resto del grupo. Un 90% de los estudiantes concluyeron acertadamente que Apolonio de Pérgamo describió las curvas y les dio nombre y que Kepler las relacionó con la trayectoria que describían los planetas; un 10% afirmaron que era Kepler.

Antes de pasar a la segunda sesión se dejó un lapso para construir la elipse con papel plegado y un 90% se dieron cuenta que el centro del círculo y el punto elegido al azar constituían los focos de una elipse, además se incentivó la creatividad.

- En la segunda sesión constituida por tres partes (Parte A, B y C), en cuyos resultados se evidenció una notable mejora con respecto a las respuestas obtenidas en el la primera prueba diagnóstica (ver anexo A). Un 90% concluyó que las dos figuras con los chinches situados a 2 cm y 6 cm del centro de coordenadas, eran figuras elípticas; además, un 80% identificó los elementos de la elipse y un 70% logró definir el concepto de elipse con

las actividades realizadas. El resto de estudiantes que presentaron dificultades se les dio un refuerzo sobre el tema, despejando las dudas que tenían; además, se observó una gran colaboración entre los grupos de trabajo.

- La tercera sesión fue muy provechosa, en la cual se buscaba lograr el objetivo de dar aplicabilidad a los conceptos teóricos diseñando las trayectorias elípticas de algunos cuerpos celestes (planetas del sistema solar y el cometa Halley) utilizando la tercera Ley de Kepler.

El 100% de los estudiantes en grupos de cuatro lograron relacionar la distancia r con respecto al Sol en unidades astronómicas (U.A.) y la excentricidad, mediante la ecuación de la trayectoria elíptica para diferentes ángulos.

Con los datos obtenidos realizaron las gráficas de las trayectorias de varios planetas y un 80% de los estudiantes compararon las excentricidades de los planetas con la del cometa Halley, el 20% realizó las gráficas pero no realizaron ninguna comparación. Fue muy notorio el trabajo colaborativo y con sus inquietudes se fomenta el aprendizaje significativo, reflexivo y crítico.

2. Evaluación del segundo proyecto "La fuerza de gravitación universal y el movimiento de los planetas y satélites" (ver anexo C).

Constituido de tres sesiones, en las cuales se evaluaron los objetivos de cada una de las actividades.

- La primera sesión teórica tiene como objetivo dar a conocer el principio de gravitación universal y se le dio aplicabilidad en la solución de problemas, resumidos en un bloque de cinco preguntas claves (Ver anexo B).

En primera instancia se designó un grupo de cuatro estudiantes como monitores, que junto con el docente realizaron exposiciones, iniciando con una motivación teórica sobre las Leyes de Kepler y reforzada con un video "La

manzana y la Luna”(https://www.youtube.com/watch?v=KowFQaanUMk video realizado por California Institute of Technology – The Corporation for community College Television- The Annenberg / CPB Project), llegando a la explicación de la ecuación matemática de la fuerza gravitacional; siguiendo con la actividad, se abordó cada pregunta con ejemplos explicativos guiando a sus compañeros al desarrollo y evaluación de la sesión.

A continuación se dio lugar a la solución de las preguntas clave, donde se dieron los siguientes resultados:

Para la pregunta A de selección múltiple con única respuesta, que pretende determinar la influencia de la masa y la distancia con la fuerza gravitacional, se obtuvo que un 80% de los estudiantes contestaron correctamente la prueba proceso, un 10% contestaron correctamente pero no hicieron ningún proceso y un 10% no contestaron correctamente.

Para la pregunta B de selección múltiple con única respuesta, que pretende determinar la fuerza gravitacional, un 90% de los estudiantes contestaron correctamente y un 10% no lo hicieron.

Para la pregunta C de selección múltiple que pretende relacionar la fuerza gravitacional con la aceleración centrípeta, un 80% contestaron correctamente y un 20% no lograron hacerlo en forma correcta.

Para la pregunta D, que relaciona la fuerza gravitacional con la intensidad y la energía potencial de un campo gravitatorio, en las cuales se formularon preguntas de ensayo, un 70% contestaron correctamente, mientras que un 30% les pareció difícil.

Para la pregunta E, en la cual se plantea la interrogación que si ¿es posible deducir la tercera Ley de Kepler a partir de la fuerza gravitacional?, se propusieron preguntas de ensayo, en las cuales un 80% de los estudiantes con los ejemplos explicados, lograron contestarlas en forma correcta y un 20%

se les dificultó y los procesos fueron incorrectos.

En esta sesión se evaluó también la participación de los estudiantes expositores y la de los compañeros asistentes, el dominio del tema; hubo un análisis crítico de los resultados de los problemas propuestos, se observó el interés por parte de cada uno de ellos, se resolvieron las dudas y el trabajo colaborativo ayudó a la consecución de los objetivos propuestos.

- La segunda sesión fue práctica y se evaluó la creatividad y el ingenio que tuvieron los 30 estudiantes (el 100%), al planear, diseñar y ejecutar la construcción de un planetario visto desde un ambiente lunar, motivándolos al estudio de la Astronomía. crearon un ambiente adecuado donde con sus exposiciones despertaron la imaginación y el interés de los niños, niñas y jóvenes de otros grados hacia el tema de la gravitación universal y su relación con el movimiento de los planetas y los satélites.

El 100% de los estudiantes y docentes visitantes evaluaron en forma positiva con un rango de excelente la actividad desarrollada por los estudiantes y un gran número de ellos participaron con preguntas abiertas, las cuales en su mayoría (un 90%) fueron contestadas acertadamente.

Lo anterior ayudo a reforzar aún más el concepto de gravitación universal y sus aplicaciones y temas generales relacionados con los cuerpos celestes.

- La tercera sesión la cual se identifica como “una caminata espacial para observar los cuerpos celestes”, pretende llevar a cabo el objetivo de observar el movimiento de los cuerpos celestes mediante la utilización de telescopios.

Se inició con una actividad de preparación previa de las características principales del Sol, la Luna y los planetas.

Aquí se evaluó la participación de todos los estudiantes en las exposiciones de los grupos de trabajo la cual fue de un 80%, los expositores cuya

evaluación realizada mediante una encuesta en cuanto a la preparación de los temas, dominio de éstos, manejo de la clase, utilización de herramientas didácticas y recursos tecnológicos entre otros, fue evaluada cualitativamente por los estudiantes y el docente como excelente.

Lo anterior les dio bases para que participaran con preguntas abiertas durante la práctica de astronomía en el observatorio.

La práctica en el observatorio estuvo llena de inquietudes las cuales fueron despejadas por personal del observatorio expertos en el tema, como son el estudio de la carta estelar, la posición de los astros en la esfera celeste, los tipos de telescopios que han existido para escanear el cielo, así como la observación directa del Sol y la Luna con los telescopios especializados, el estudio de la Luna mediante observaciones directas, donde se pudieron observar los diferentes cráteres.

Esta práctica ayudo a valorar el impacto de los avances científicos en la exploración del espacio y su relación con la fuerza gravitacional.

3. Evaluación del tercer proyecto "El satélite de Newton y el movimiento de la Luna" (ver anexo D).

Este proyecto pretende recrear el pensamiento de Newton, cuando lo llevó a imaginar y comparar el movimiento de la Luna con el de la bala de un cañón disparada desde la cima de una montaña localizada a gran altura.

Naturalmente se pretende relacionar lo anterior con la fuerza gravitacional y al mismo tiempo resaltar los avances científicos que se han logrado a través de la historia en la conquista del espacio.

Para desarrollar el proyecto se trabajaron tres sesiones:

- La primera sesión estuvo dirigida en forma secuencial, de tal manera que los estudiantes fueran primeros motivados con una lectura sobre los viajes

realizados por el hombre a la Luna, la cual despejó dudas en el 70% de los estudiantes que creían que el hombre había ido solamente una vez.

Se continuó con exposiciones por parte de los estudiantes sobre el tema de tiro parabólico explicando sus características principales, las ecuaciones que se derivan y planteando algunos ejemplos de aplicación.

En primer lugar para evaluar este tema se utilizó un simulador de tiro parabólico donde el estudiante tenía que realizar los cálculos antes de ser arrojados por el programa.

Un 90% de los estudiantes realizaron los cálculos de la altura máxima, el alcance horizontal máximo, el tiempo de subida y el de vuelo (eligiendo el ángulo de tirio, la velocidad y la masa del proyectil) en forma correcta y llenaron la tabla 1 de este anexo. Un 60% de los estudiantes contestaron la autoevaluación realizando su análisis en forma correcta, el 40% restante fue necesario reforzarles el tema.

La práctica de tiro parabólico despertó el ingenio y la creatividad de los estudiantes al diseñar cañones de alcohol e hidráulicos.

Para cada ángulo (80° y 70°) se realizaron prácticas por triplicado, obteniendo un promedio de su alcance horizontal, se completó la misma tabla anterior. Un 90% de los estudiantes realizaron los cálculos y la completaron. Un 80% de los estudiantes contestaron las preguntas 1 y 2 de la autoevaluación en forma correcta.

En cuanto a las respuestas de la pregunta 3, la que más predominó en un 95% fue el efecto del aire en la trayectoria del proyectil, afirmando que éste frenaba y desviaba su trayectoria; en la pregunta 4, un 80% dijeron que era más preciso el simulador ya que no consideraba la fricción, pero era más divertida la práctica de campo.

- En la segunda sesión identificada el “cañón de Newton” que buscó recrear

el pensamiento de Newton mediante un simulador virtual, el cual pretende explicar que la Luna a igual que la bola de cañón se mantendría cayendo en órbita alrededor de la Tierra.

En cuanto a las respuestas de las preguntas, un 95% de los estudiantes contestaron en la primera que el proyectil se estrellaba con la Tierra por efecto de la gravedad, para la segunda y tercera un 80% afirmaron que el proyectil seguía orbitando alrededor de la Tierra y que para velocidades muy altas se perdía en el firmamento debido a que se alejaba del centro de la Tierra.

Cuando se utiliza el cañón de sacos de pólvora un 70% contestaron algo similar. En cuanto al transbordador un 65% contestó que se necesitaba un cohete que lo elevara tanto y al sacarlo del espacio lo impulsaba para que siguiera orbitando así como sucedía con el cañón, el otro 35% no supo explicarlo.

En cuanto a su relación con la Luna el mismo 65% dijo que sucedía lo mismo con el transbordador o satélite, el 35% no lograron explicarlo.

- En la tercera sesión identificada “velocidad de escape”, un 70% de los estudiantes calcularon correctamente la velocidad de escape del primer problema, mientras un 30% tomó la masa del cuerpo en lugar de la masa de la Tierra.

  En el segundo problema un 80% contestó que las dos sondas tienen la misma velocidad de escape sin importar la masa, mientras que el 20% contestó que la de mayor masa debía tener mayor velocidad inicial. Por último el 90% calculó correctamente la velocidad de “escape de un cuerpo en el planeta Júpiter y el 10% no lo hizo correctamente.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

- En el siglo XX se destacan importantes avances científicos como la exploración del universo con la utilización de telescopios de largo alcance, que han permitido avanzar en el conocimiento del mismo, lo cual ha permitido comprender mejor la fuerza gravitacional, desde el punto de vista del movimiento de los planetas y satélites.

- El conocimiento científico es un componente primordial de la formación básica, puesto que cultiva el potencial de formar seres humanos capaces de generar desarrollo sostenible para las generaciones presentes y futuras, a partir de la investigación del más alto nivel en todas las disciplinas, pero particularmente en aquellas que pueden fomentar el progreso tecnológico y científico al servicio de la sociedad y del medio ambiente. Por esta razón se considera importante diseñar experiencias de aprendizaje de las ciencias que impliquen la experimentación y observación directa, de tal manera que sean significativas y generen una mayor y mejor apropiación del conocimiento.

- En este trabajo se introdujeron temáticas relacionadas con la astronomía y la fuerza gravitacional, dentro de la formación en física de los estudiantes de décimo grado del colegio Isabel Valbuena Cifuentes del municipio de Vélez Santander, esto despertó su curiosidad científica hacia nuevos temas, que anteriormente no se habían tratado dentro del currículo y además coadyuvó al trabajo interdisciplinario, relacionando estas experiencias con temas de la trigonometría, como por ejemplo las secciones cónicas.

- Se diseñaron experiencias de aprendizaje significativo basadas en proyectos de aula, en donde los estudiantes tuvieron la posibilidad de experimentar directamente a través de prácticas de observación, exposiciones de los

planetas, así como el desarrollo de su creatividad e ingenio en el diseño y montaje del planetario, sus inquietudes se resolvieron en las prácticas de campo en el observatorio astronómico de Villa de Leiva; se evidenció el análisis crítico en cada uno de los cuestionamientos del proyecto, en lo que tiene que ver con la fuerza gravitacional y su relación con el movimiento de los satélites.

- Los proyectos de aula facilitaron la inmersión de los estudiantes en los avances científicos de la astronomía, impactando positivamente en su formación integral, puesto que como se confirmó en la evaluación conjunta, después de la participación en los proyectos su interés hacia los temas tratados se incrementó notablemente, llegaron a un alto nivel de comprensión sobre los interrogantes que se plantearon en las pruebas diagnósticas, además que valoraron positivamente la importancia de la astronomía en la formación científica y en el conocimiento humano.

5.2 Recomendaciones

A partir del proyecto implementado se recomienda:

- En otros trabajos es factible el diseño de estrategias didácticas similares a ésta, de tal forma que sean aplicables a diferentes temas dentro del espectro de las ciencias naturales y exactas.

- Es deseable por parte de las instituciones educativas que se incluyan los proyectos de aula implementándolos en la malla curricular y los planes de estudio, en particular para los grados décimo y undécimo de la educación media.

- En el desarrollo de este tipo de estrategias es importante tener en cuenta los aprendizajes significativos y por supuesto los ritmos de aprendizaje, de tal forma que se logre una mayor apropiación del conocimiento y se realicen actividades de refuerzo adecuados.

A. Anexo: Prueba diagnóstica

1. Primera prueba diagnóstica

PRUEBA DIAGNÓSTICA NO. 1

COLEGIO ISABEL VALBUENA CIFUENTES

Asignatura: Trigonometría **Área:** Matemáticas

Grados 10° y 11° **Número de estudiantes**: 30 **Mujeres**: 16 **Hombres**: 14
Tiempo de la práctica: 2 clases de 2 horas cada una **Docente:** Ing. Eduardo Santos.

A. ¿Quién de los siguientes personajes realizó un estudio exhaustivo de las curvas cónicas al seccionar un cono con un plano, cuya obra se conoce con el nombre de " Las cónicas", resumida en ocho libros?

B. Renato Descartes
C. Johannes Kepler
D. Apolonio de Pérgamo
E. Nicolás Copérnico

B. Realice el siguiente procedimiento utilizando una hoja de papel de oficio cuadriculado y un cartón de base:

a. Sobre el trozo de cartón coloque la hoja en blanco.
b. Con una regla trace un plano cartesiano distribuido a lo ancho y a lo largo de la hoja.
c. Marcar el centro de la línea y marque dos puntos a 2 centímetros de distancia del centro en ambas direcciones, izquierda y derecha como en la figura 1.
d. Tome un trozo de cuerda de unos cuantos centímetro de longitud (calcule que y anude las puntas formando un lazo, coloque dos chinches, cada uno a 2 centímetros del centro, se pasa el cordel alrededor de los chinches y con un lápiz tense la cuerda y dibuja la curva completamente cerrada, manteniendo siempre la cuerda tensa en los dos chinches. Repita el mismo procedimiento anterior colocando ahora los chinches a 6 centímetros a cada lado del centro.

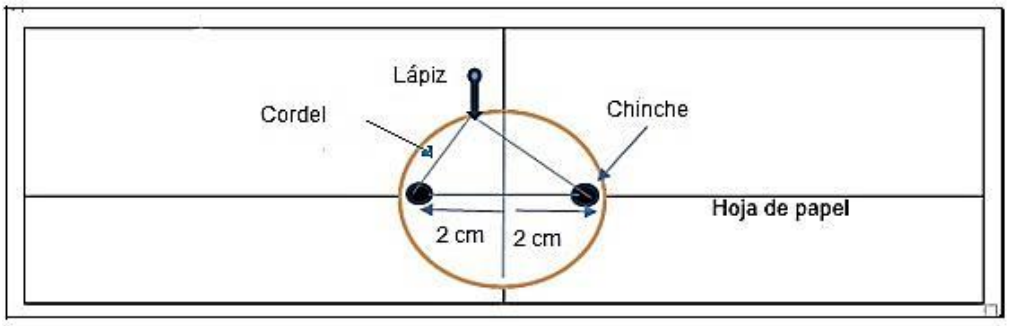


Figura 1. Diagrama de la curva utilizando los dos chinches alejados 2 cm.

a. Observando las figuras ¿Qué figura se forma con los chinches situados a dos (2) centímetros del centro? Justifique su respuesta.
b. ¿Qué figura se forma con los chinches situados a seis (6) centímetros del centro?
c. ¿Qué sucede cuando la distancia entre los dos chinches se acorta o se aumenta? Coméntelo con su compañero.
d. Tome las medidas del eje mayor de la figura a 2 cm ¿Se forma un círculo o una elipse?
e. Tome las medidas del eje mayor de la figura a 6 cm ¿Se forma un círculo o una elipse?

C. Aproveche la construcción de la figura realizada con los chinches alejados 6 cm del centro, localice los puntos que se muestran en la figura 2, e identifique sus elementos.

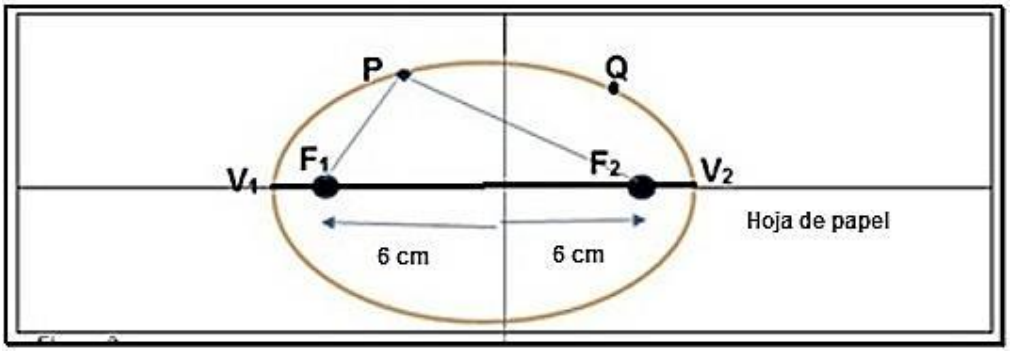


Figura 2. Diagrama de la curva utilizando los dos chinches alejados 6 cm.

a. La anterior figura representa una elipse. ¿Cómo se obtuvieron los puntos que conforman la elipse?
b. Plantee una relación de las distancias **d(F_1P)** y **d (F_2P)** y la longitud del cordón
c. Si se escoge otro punto Q,(Figura 6) ¿Qué relación habría entre la longitud del cordón y la distancia **d(F_1Q)** y **d (F_2Q).**
d. Calcule las distancias **d (V_1 F_1)**, **d (V_2,F_2)**
e. Compare las distancias **d (V_1 F_1)**, **d (V_2,F_2)**¿Qué relación hay entre ellas?
f. Calcule la distancia **d (V_1V_2,)** y compárela con la longitud del cordón. ¿Qué relación existe entre ellas?
g. ¿Qué puede decir de la distancia **d(F_1P)** + **d (F_2P)** con respecto a la distancia **d(V_1V_2,)**
h. ¿Qué puede decir de la **d(F_1Q)** + **d (F_2Q)** con respecto a la distancia **d (V_1V_2,)**
i. ¿Qué conclusión puede determinar para todos los puntos **P(x, y)** conocido con el nombre de "lugar geométrico" de la elipse?

D. ¿Es posible elaborar las órbitas de los planetas y satélites utilizando ecuaciones de las cónicas geométricas?

a. Conteste la pregunta en forma individual explicando el por qué.

b. Reúnase con tu compañeros (grupos de tres) y compartan sus respuestas hasta llegar a un consenso.

c. Nombren un vocero y socialicen a los demás grupos de compañeros a qué conclusión llegaron.

2. Segunda prueba diagnóstica

PRUEBA DIAGNÓSTICA No 2

Colegio Isabel Valbuena Cifuentes
Asignatura: Trigonometría Área: Matemáticas
Grado 10° Número de estudiantes: 30
Mujeres: 16 Hombres: 14 Tiempo de la práctica: 2 clase de 2 horas cada una
Docente: Ing. Eduardo Santos Galvis

*Obligatorio

1 ¿Qué Ley o leyes elaboró Newton? *

- Ley de Kepler
- Ley de la conservación universal
- Ley de la conservación de la materia
- Leyes de Newton

2. ¿Cuál es el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra? *

- 9,8 m/s^4
- 9,8 m/s^2
- 9,8 m/s^4
- 9,8 m/s

3. ¿La aceleración con que cae un cuerpo depende de su masa? *

- Si
- No

4. La fuerza que actúa sobre una masa cualquiera en un conjunto de masas es la: *

- la suma vectorial de las fuerzas que las demás masas ejercen sobre ella
- la resta vectorial de las fuerzas que las demás masas ejercen sobre ella
- la suma escalar de las fuerzas que las demás masas ejercen sobre ella
- la resta escalar de las fuerzas que las demás masas ejercen sobre ella

5.¿Cuál es el valor de la constante G? ·

- 9,8 N/kg
- 9,8 J/Kg
- 6,67 x 10^ -11 Nm^2/kg^2
- 6,67 x 10^ -11 Nm/kg

6.¿Si un objeto de masa m que se encuentra una altura h sobre la superficie de la Tierra, para averiguar la aceleración de caída?

- Igualamos la Ley de la Gravitación universal a la primera Ley de Inercia de Newton
- Igualamos la Ley de la Gravitación universal a la tercera Ley de acción y reacción de Newton
- Igualamos la Ley de la Gravitación universal a la segunda Ley dinámica de Newton
- Ninguna de las anteriores

7. La aceleración con que un objeto cae a una altura h de la Tierra ·

- Solo depende de la masa de la Tierra
- No depende de la masa m del objeto
- Varía de manera inversa al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra
- Todas las anteriores

8. La fuerza con que es atraída una pelota de 100g sobre la superficie de la Tierra (radio de la Tierra =6370 Km) es ·

- 0,98 N
- 1,98 N
- 0,80 N
- 0,89 N

9.Si calculamos la fuerza gravitatoria entre la Tierra y la Luna ¿con qué distancia se corresponde r? ·

- Entre la superficie de la Tierra y la Luna
- Entre el centro de la Tierra y el de la Luna
- Del centro de la Tierra a la superficie de la Luna
- De la superficie terrestre al centro de la Tierra

10.¿Cuál es el valor de la fuerza gravitatoria entre el Sol y la Tierra ? *

Calcúlela a partir de los siguientes datos:Masa del Sol, Msol= 1,99 x 10^30 Kg; Masa de la Tierra. Mtierra= 5,97 x 10^24 Kg; distancia R del Sol - Tierra, Rsol-tierra = 1,5 x 10^8 Km

- 3,52 x 10^28 N
- 5,28 x 10^33 N
- 3,52 x 10^22 N
- 5,28 x 10^36 N

11.¿Qué valor de la gravedad existirá en un punto situado a una distancia de 3000 km sobre la superficie terrestre? *

Utiliza estos datos para calcularla: Masa de la Tierra. Mtierra= 5,97 x 10^24 Kg; radio de la Tierra R tierra= 6370 Km

- 4,54 m/s^2
- 7,62 m/s^2
- 8,75 m/s^2
- Ninguna es correcta

12.Un satélite geoestacionario se caracteriza por *

- Estar siempre en el mismo punto y el periodo orbital es de 2 días
- El período es de 24 horas y está a 72.000 km de la Tierra
- Tener un periodo orbital de 24 horas y se encuentra a una distancia de la superficie de la Tierra de 36.000 Km
- Tener una altura de 36.000 Km

13.¿Has relacionado la Ley de la Gravitación con el movimiento de la Luna y los planetas? *

- Si
- No

14.¿En qué forma has escaneado el cielo? *

- ¿con solo la vista?
- ¿con telescopios?
- ¿No lo has hecho nunca?
- ¿No te ha llamado la atención?

Enviar

Con la tecnología de Google Forms

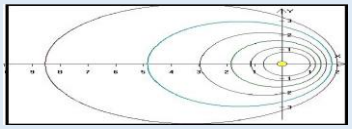
Este formulario se creó en Universidad Nacional de Colombia.

Informar sobre abusos - Condiciones del servicio - Otros términos

Prueba diagnóstica realizada con la herramienta Google Drive, aplicada en forma aleatoria a una muestra de 30 estudiantes de los grados décimo y undécimo del Colegio Isabel Valbuena Cifuentes, jornada de la tarde.

B. Anexo: Primer proyecto de Aula

1. Nombre del proyecto



"CONSTRUYENDO ÓRBITAS ELÍPTICAS DE LOS PLANETAS"

2. Descripción del proyecto

Las trayectorias circulares y elípticas son un tema muy importante que antiguamente fue trabajado por simple diversión, pero con variadas aplicaciones en muchas áreas de la ciencia, entre ellas la Física y la Astronomía. Se persigue con esta sesión sensibilizar al estudiante en la construcción de la elipse, sin adentrarnos al tema geométrico - analítico; además se le da aplicabilidad en la construcción de las trayectorias elípticas de los cuerpos celestes y su relación con la gravitación universal.

En diversas ocasiones al estudiante se le enseñan conceptos físicos y matemáticos y no se le hace ver la importancia del tema en la vida diaria y cómo lo podría relacionar con su contexto; por lo tanto, se hace necesario antes de abordar el tema, sensibilizar al estudiante con actividades, en la que él mismo le encuentre la importancia al tema.

El primer problema que se va a tratar en esta sesión es ¿Se puede diferenciar a simple vista una trayectoria circular de una elíptica? ¿Realizar mediciones directas ayuda a diferenciarlas?

El segundo problema es ¿Qué relación existe entre las trayectorias circulares y elípticas con el movimiento de los planetas y satélites?

3. Justificación

De acuerdo a los primera prueba diagnóstica realizada, se observa que un alto número de estudiantes no llegaron aproximarse al objetivo, que era deducir el concepto de elipse e identificar sus elementos, fallando la habilidad de observación, donde un 95% confundió una elipse realizadas con los focos a corta distancia del centro con una circunferencia; y lo más curioso es que después de medir los ejes, un 90% insiste que es una circunferencia. Para determinar los elementos de una elipse la dificultad fue notoria, un 55% no identificó los elementos de la elipse.

En cuanto a la relación de las trayectorias circulares y elípticas con el movimiento de los planetas y satélites y la fuerza gravitacional, se observó que lo asocian pero no justificaron el ¿por qué?

Mediante este proyecto de aula se pretende, a través de la creatividad, el trabajo colaborativo y la participación activa de los estudiantes, establecer la relación entre las secciones circulares y elípticas con la trayectoria que describen los planetas, llegando a la comprensión del concepto de elipse y sus principales características.

4. Objetivos

4.1 Objetivo general

Diseñar una estrategia didáctica para la comprensión de las trayectorias circulares y elípticas a través de los antecedentes históricos, incentivando su creatividad, de tal manera que pueda establecer su relación con el movimiento de los cuerpos celestes, como los planetas y satélites del sistema solar.

4.2 Objetivos específicos

4.2.1 Motivar al estudiante a conocer la historia de personajes que estudiaron las trayectorias elípticas de los cuerpos celestes.

4.2.2 Incentivar la creatividad para construir formas elípticas utilizando elementos simples y determinando sus características principales.

4.2.3 Dar aplicabilidad a los conceptos teóricos diseñando trayectorias elípticas de algunos cuerpos celestes como planetas y cometas, conociendo su excentricidad y distancia media con relación al Sol.

5. Metodología

El proyecto de aula aplicado a 20 alumnos de décimo grado se realizará con tres sesiones didácticas, a saber: la primera, es ambientación a las secciones cónicas; la segunda, construcción de la elipse en un plano cartesiano identificando sus elementos; la tercera, en la construcción de las trayectorias elípticas de algunos planetas y el cometa Halley.

Cada sesión tiene objetivos, recursos, procedimiento, unas preguntas para reflexionar e inician con actividades que pueden ser un video descargado de internet o un video pregrabado por parte del docente, una lectura de reflexión. El propósito es deducir el concepto de la elipse. Para ello los estudiantes deben construirla utilizando diferentes métodos materiales donde reconozcan sus elementos característicos y para finalizar la aplicación en el diseño de las trayectorias elípticas de algunos cuerpos celestes.

Se organizarán dos grupos grandes de igual número de estudiantes. Para algunas actividades se organizan en subgrupos de cuatro estudiantes.

Se resalta el trabajo colaborativo participativo donde los grupos darán a conocer sus resultados y aportes, con el respeto que se merecen cada una de sus opiniones o comentarios por más simples que sean.

6. Fases de desarrollo

PRIMERA SESIÓN

6.1 Actividad de ambientación a las secciones cónicas

6.1.1 Proyección de video de motivación elaborado por el mismo docente y video sobre las Leyes de Kepler

- Primer video : Elaborado por el docente, 5 minutos
- Segundo video: Leyes de Kepler, 30 minutos

Objetivo de la actividad

Ambientar a los estudiantes sobre la importancia de las figuras cónicas y conocer las Leyes de Kepler en el estudio de la trayectoria del planeta Marte, realizando un breve resumen y comentario sobre los temas tratados en ambos videos.

Materiales

-Video sobre sensibilización a las secciones cónicas realizado por el docente. Ver en el link: https://youtu.be/ZviTuE9aQ-o
-Video sobre el estudio de las secciones cónicas y un análisis sobre las Leyes de Kepler. Ver el link: https://www.youtube.com/watch?v=KowFQaanUMk video realizado por California Institute of Technology – The Corporation for community College Television- The Annenberg / CPB Project.
-Portátil.
-Tablero electrónico.
-Hojas de comentarios

Autoevaluación:

Realice un breve comentario acerca de los dos videos vistos ¿Le da alguna idea acerca del tema a tratar? Coméntelo con uno de sus compañeros(as) y luego socialícelos a todos los demás grupos.

6.1.2 Elaboración de una elipse a través del plegado de papel en dos etapas

Tiempo: 30 minutos

Objetivo

Construir la elipse mediante la técnica de plegado.

Materiales: Papel y Lápiz, compás, regla.

Procedimiento

- Recortar un circulo de papel de cualquier radio e indique el centro “O” del mismo.
- Marque en el interior de dicho círculo el punto P, que sea distinto a su centro
- Doble el círculo de tal manera que la esfera pase por el punto P, como se indica en la Figura 1a.

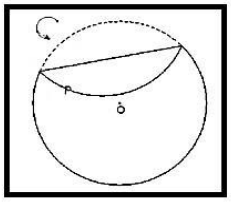


Figura.1a. Papel plegado

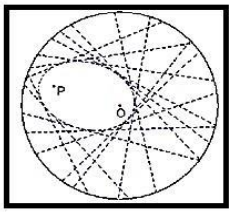


Figura. 1 b. Construcción de elipse

- Realice varios dobleces haciendo siempre coincidir puntos de la circunferencia con el punto P, hacer esto en varias direcciones.
- Una vez realizados los dobleces (Figura 1b)

a. ¿Qué observas? Discute con tus compañeros.
b. ¿Qué figuras se obtienen? Delinéala
c. ¿Qué función cumplen los puntos O y P?

Aproximación a la observación que pueden realizar los estudiantes:

Los dobleces realizados pueden delimitar una elipse cuyos focos son a simple vista los puntos O y P, el centro del círculo, y el punto P figuran en su interior y representan los focos de la elipse, tal como se muestra en la Figura 1b. La figura formada es conocida con el nombre de ELIPSE.

SEGUNDA SESIÓN

6.2 Actividad de construcción de la elipse en un plano cartesiano con sus elementos

PARTE A

6.2.1 Construcción de la elipse por el método del jardinero

Tiempo: 45 minutos

Objetivo

Observar la variación de la forma de la elipse cuando se le acorta o aumenta la distancia entre los dos puntos llamados focos.

Materiales

Hoja de papel tamaño carta y un trozo de cartón, regla, lápiz, cuerda, hilo o cualquier trozo de cordel delgado o hilo de cáñamo, 2 chinches o tachuelas.

Procedimiento

a) Sobre el trozo de cartón coloque la hoja en blanco.
b) Con una regla trace un plano cartesiano distribuido a lo ancho y a lo largo de la hoja.
c) Marcar el centro de la línea y marque dos puntos a 2 centímetros de distancia del centro en ambas direcciones, izquierda y derecha como en la figura 2.
d) Tome un trozo de cuerda de unos cuantos centímetros de longitud (calcule que y anude las puntas formando un lazo, coloque dos chinches, cada uno a 2 centímetros del centro, se pasa el cordel alrededor de los chinches y con un lápiz tense la cuerda y dibuja la curva completamente cerrada, manteniendo siempre la cuerda tensa en los dos chinches. Construya la figura 3 y repita el mismo procedimiento anterior colocando ahora los chinches a 6 centímetros a cada lado del centro.

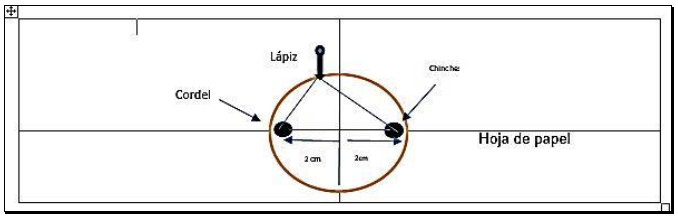


Figura 2. Elipse con distancia entre los chinches de 2 cm

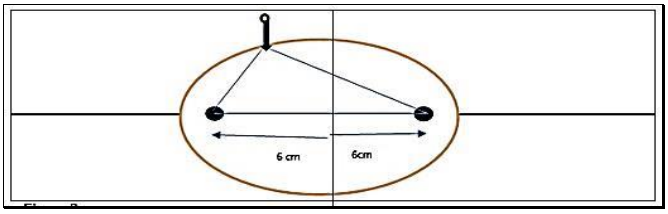


Figura 3. Elipse con distancias entre los chinches de 6 cm

Observe las dos figuras, tome las medidas de los ejes horizontal y vertical de cada una, ¿Qué sucede cuando la distancia entre los dos chinches se acorta o se aumenta? Coméntelo con su compañero.

PARTE B

6.2.2 Elementos de la elipse

Tiempo: 1 hora

Objetivo

Localizar los elementos de la elipse (focos, vértices) y establecer relaciones entre sus distancias con respecto a un punto P.

Procedimiento

Se aprovecha la construcción de la elipse de 6 centímetros y localizan los focos correspondientes a los puntos **F_1, F_2** y el punto **P** (Figura 4).

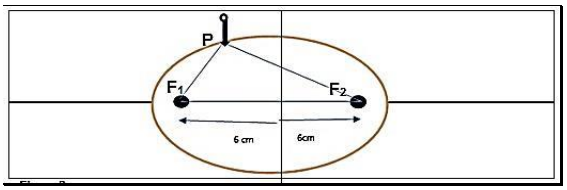


Figura 4. Localización de los focos (F_1, F_2) y el punto P

Une mediante una recta los focos **F_1 y F_2** y prolonga los extremos hasta tocar los puntos de corte de la figura, llamemos a dichos puntos vértices y los denotamos así: **V_1** y **V_2.** Traza la mediatriz a la recta **V_1** y **V_2** y denota el punto medio como **O** que llamaremos centro de la elipse, tal como se ilustra en la figura 5.

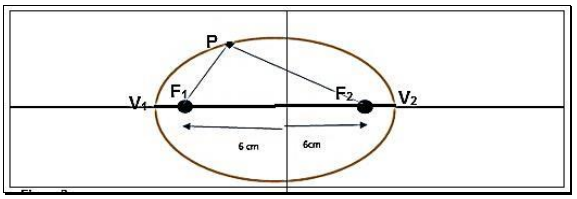


Figura 5. Localización de los vértices

a. ¿Cómo se obtuvieron los puntos que conforman la elipse?
b. Plantea una relación de las distancias **d(F_1P)** y **d (F_2P)** y la longitud del cordón
c. Si escogemos otro punto Q, (Figura 6) ¿Qué relación habría entre la longitud del cordón y la distancia **d (F_1Q)** y **d (F_2Q)?.**

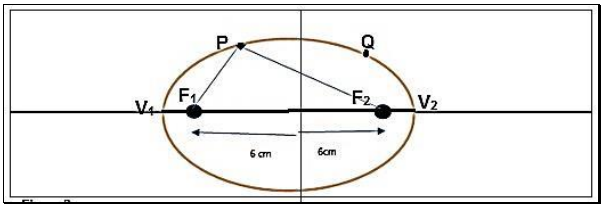


Figura 6. Elipse con un punto Q

Socializa tus respuestas con tus compañeros

d. Calcula las distancias **d (V_1 F_1), d (V_2F_2).**
e. Compara las distancias **d (V_1F_1), d (V_2F_2)** ¿Qué relación hay entre ellas?
f. Calcula la distancia **d (V_1V_2)** y compárala con la longitud del cordón. ¿Qué relación existe entre ellas?
g. ¿Qué podemos decir de la distancia **d(F_1P)** + **d (F_2P)** con respecto a la distancia **d (V_1V_2)**
h. ¿Qué podemos decir de la distancia **d(F_1Q)** + **d (F_2Q)** respecto a la distancia

i. ¿Qué conclusión puede determinar para todos los puntos **P(x, y)** conocido con el nombre de “lugar geométrico” de la elipse?

PARTE C

6.2.3 ¿Cuál es el concepto de elipse?

Tiempo: 45 minutos

Objetivo

Deducir el concepto de elipse después de haber realizado las actividades anteriores y con el desarrollo de un ejercicio utilizando las coordenadas de cada uno de los elementos de la elipse.

Procedimiento

- Realice la gráfica de la elipse y localice las coordenadas de sus elementos.

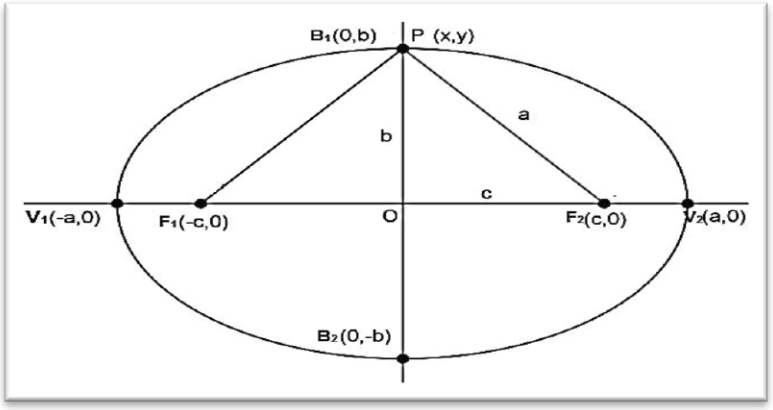


Figura 7. Coordenadas de una elipse en un plano cartesiano

a. ¿Cuáles son las coordenadas de los focos y de los vértices?
b. ¿Cuál es la distancia entre los focos?
c. ¿Cuál es la distancia entre los vértices?
d. ¿A qué es igual la suma de las distancias **$d(V_1F_1)$ + $d(V_1F_2)$**
e. Compara las distancias de los vértices con la suma de las distancias entre **V1** a Cada uno de los focos **$d(V_1V_2)$, $d(V_1F_1)$ + $d(V_1F_2)$ ¿**Cómo son?
f. Si al realizar el punto anterior comprobaste que:
$d(V_1V_2) = d(V_1V_2)$, $d(V_1F_1)$ + $d(V_1F_2) = 2a$
g. ¿Qué puedes decir de las distancias **$d(F_1P) + d(F_2P)$**?, compárala con la anterior.
Con base a todo lo anterior y teniendo en cuenta que el punto P en cualquier sitio de la curva constituye el lugar geométrico de la elipse, defina con sus propias palabras el concepto de “elipse”.

TERCERA SESIÓN

6.3 Construcción de las trayectorias de los cuerpos celestes

Tiempo: 60 minutos

Objetivo

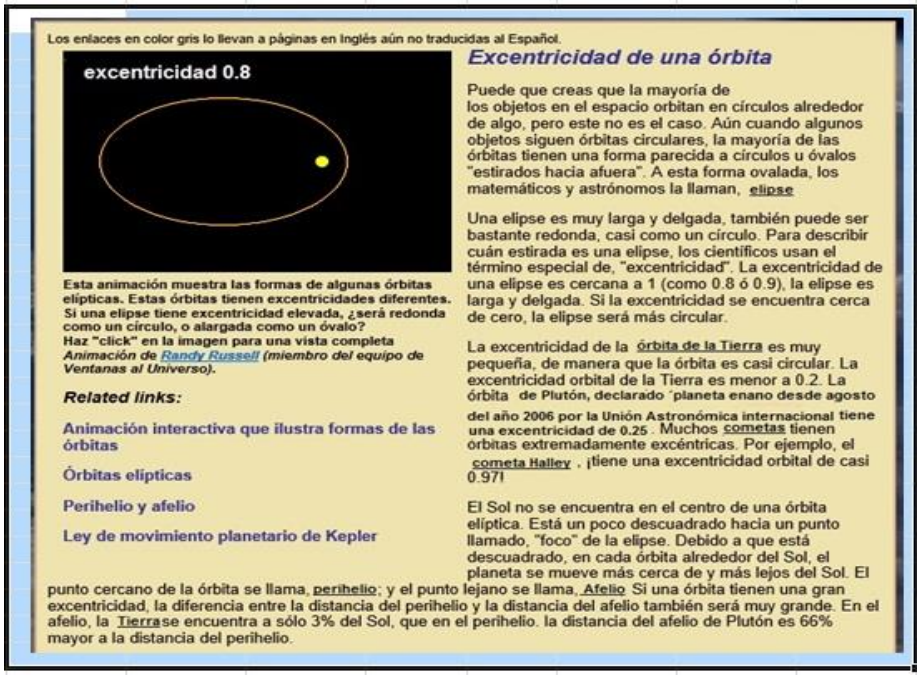
Trazar las trayectorias elípticas de algunos planetas teniendo en cuenta la excentricidad y la distancia media en unidades astronómicas UA (esta distancia se toma con respecto al sol sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol es de 1 UA (aproximadamente 150 millones de kilómetros)

Materiales

- Hojas de papel milimetrado tamaño oficio y un trozo de cartón, regla, lápiz, transportador, curvígrafo, calculadora.

Procedimiento

Teniendo en cuenta la siguiente información de la figura 8 y los datos de la tabla 1, realice las trayectorias de tres planetas y el cometa Halley tomando una escala 1:1, en papel milimetrado.



Los enlaces en color gris lo llevan a páginas en Inglés aún no traducidas al Español.

excentricidad 0.8

Esta animación muestra las formas de algunas órbitas elípticas. Estas órbitas tienen excentricidades diferentes. Si una elipse tiene excentricidad elevada, ¿será redonda como un círculo, o alargada como un óvalo?
Haz "click" en la imagen para una vista completa
Animación de Randy Russell (miembro del equipo de Ventanas al Universo).

Related links:

Animación interactiva que ilustra formas de las órbitas

Órbitas elípticas

Perihelio y afelio

Ley de movimiento planetario de Kepler

Excentricidad de una órbita

Puede que creas que la mayoría de los objetos en el espacio orbitan en círculos alrededor de algo, pero este no es el caso. Aún cuando algunos objetos siguen órbitas circulares, la mayoría de las órbitas tienen una forma parecida a círculos u óvalos "estirados hacia afuera". A esta forma ovalada, los matemáticos y astrónomos la llaman, elipse

Una elipse es muy larga y delgada, también puede ser bastante redonda, casi como un círculo. Para describir cuán estirada es una elipse, los científicos usan el término especial de, "excentricidad". La excentricidad de una elipse es cercana a 1 (como 0.8 ó 0.9), la elipse es larga y delgada. Si la excentricidad se encuentra cerca de cero, la elipse será más circular.

La excentricidad de la órbita de la Tierra es muy pequeña, de manera que la órbita es casi circular. La excentricidad orbital de la Tierra es menor a 0.2. La órbita de Plutón, declarado ´planeta enano desde agosto del año 2006 por la Unión Astronómica internacional tiene una excentricidad de 0.25 . Muchos cometas tienen órbitas extremadamente excéntricas. Por ejemplo, el cometa Halley , ¡tiene una excentricidad orbital de casi 0.971

El Sol no se encuentra en el centro de una órbita elíptica. Está un poco descuadrado hacia un punto llamado, "foco" de la elipse. Debido a que está descuadrado, en cada órbita alrededor del Sol, el planeta se mueve más cerca de y más lejos del Sol. El punto cercano de la órbita se llama, perihelio; y el punto lejano se llama, Afelio Si una órbita tienen una gran excentricidad, la diferencia entre la distancia del perihelio y la distancia del afelio también será muy grande. En el afelio, la Tierrase encuentra a sólo 3% del Sol, que en el perihelio. la distancia del afelio de Plutón es 66% mayor a la distancia del perihelio.

Figura 8: Texto excentricidad de una órbita.

Tomada de la fuente: Ventanas al universo del link:

http://www.windows2universe.org/physical_science/physics/mechanics/orbit/eccentricity.html&lang=sp

Para esto debe escoger de la tabla 1, la excentricidad e (número adimensional) y la distancia excéntrica desde el Sol en U.A. Utilizando ángulos de 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 170° y 180°

Planetas del sistema solar	Mercurio	Venus	La Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Diámetro (La Tierra=1)	0.382	0.949	1	0.532	11.209	9.44	4.007	3.883
Diámetro (Kilómetro)	4.878	12.104	12.756	6.787	142.800	120.000	51.118	49.528
Masa(La Tierra=1)	0.055	0.815	1	0.107	318	95	15	17
Distancia excéntrica desde el Sol(UA)	0.39	0.72	1	1.52	5.20	9.54	19.18	30.06
Período orbital(años de la Tierra)	0.24	0.62	1	1.88	11.86	29.46	84.01	164.8
Excentricidad orbital	0.2056	0.0068	0.0167	0.0934	0.0483	0.0560	0.0461	0.0097
Velocidad orbital excéntrica(Kilómetros/segundos)	47.89	35.03	29.79	24.13	13.06	9.64	6.81	5.43
Período de rotación(en díasTerrestres)	58.65	-243*	1	1.03	0.41	0.44	-0.72*	0.72
Inclinación del eje(grados)	0.0	177.4	23.45	23.98	3.08	26.73	97.92	28.8
Temperatura estimada de la superficie(C)	-180 to 430	465	-89 to 58	-82 to 0	-150	-170	-200	-210
Gravedad en el Ecuador (La Tierra=1)	0.38	0.9	1	0.38	2.64	0.93	0.89	1.12
Velocidad de escape (kilómetros/segundo)	4.25	10.36	11.18	5.02	59.54	35.49	21.29	23.71
Densidad estimada (agua=1)	5.43	5.25	5.52	3.93	1.33	0.71	1.24	1.67
Composición atmosférica	ninguna	CO_2	N_2+O_2	CO_2	H_2+He	H_2+He	H_2+He	H_2+He
Número de Lunas	0	0	1	2	63	62	27	13
¿Anillos?	no	no	no	no	si	si	si	si

Tabla1:Fuente:Ventanasaluniverso,http://www.windows2universe.org/our_solar_system/planets_table.html&lang=sp

Excentricidad (e) para diferentes trayectorias: parabólica, elíptica e hiperbólica

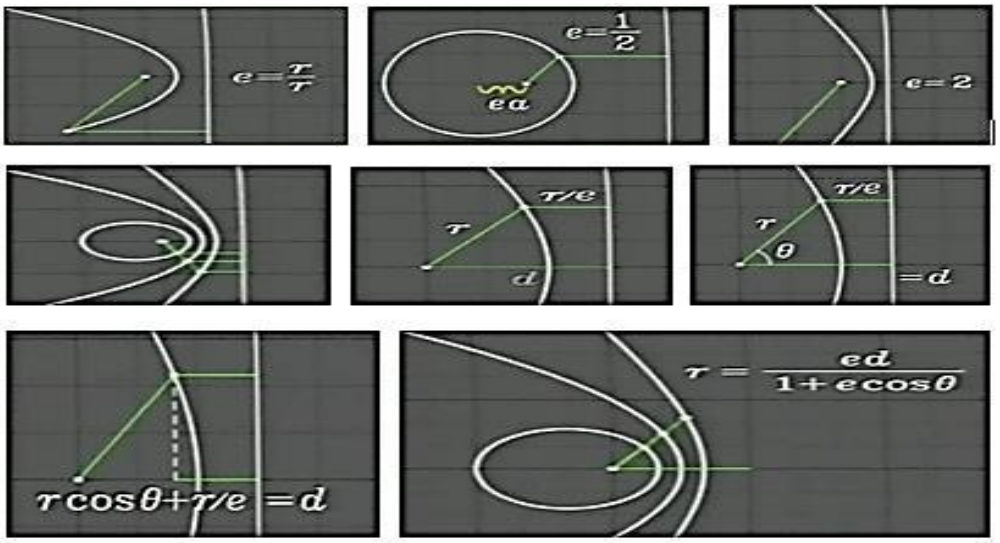


Figura 9: Trayectorias parabólicas, elípticas e hiperbólicas de un cuerpo celeste.

Para calcular la distancia r la cual va variando de acuerdo al ángulo, utilice la siguiente relación para una trayectoria elíptica.

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta},$$

donde a es la distancia excéntrica desde el sol en unidades astronómicas (U.A.), e es la excentricidad y r es la distancia del foco (Sol) a cualquier punto de la trayectoria elíptica del cuerpo celeste, también está dado en U.A.

- Realice una tabla para los valores de r para cada ángulo.
- Realice la gráfica en una sola hoja de cada planeta la del cometa Halley y compare cada una de las trayectorias.
- Haga un análisis de la práctica con su compañero.
- Compare las excentricidades de los planetas con la del cometa Halley

7. Cronograma de actividades

Actividad	Fecha	Objetivo	Responsables
1. Dar a conocer al estudiante el proyecto y sensibilizarlo acerca de su importancia	06 de Marzo de 2015	Sensibilizar a los estudiantes instrucciones acerca del proyecto y sus incentivos en cada uno de los periodos académicos.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada tarde.
Primera Situación :Actividad de ambientación a las secciones cónicas			
2.Proyección de video elaborado por el docente del área y video sobre las Leyes de Kepler	8 de Marzo de 2015	Ambientar a los estudiantes sobre la importancia de las figuras cónicas en general y realizar una pequeña reseña histórica sobre las figuras cónicas y las Leyes de Kepler	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada tarde.
3.Elaboración de una elipse a través del plegado de papel en dos etapas	13 de Marzo de 2015	Construir la elipse mediante la técnica de plegado	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada tarde.
Segunda situación: Actividad de construcción de la elipse en un plano cartesiano con sus elementos.			
4. Construcción de la elipse por el método del jardinero	20 de Marzo de 2015	Observar la variación de la forma de la elipse cuando se le acorta o aumenta la distancia entre los dos puntos llamados focos.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada tarde.
5.Elementos de la elipse	22 y 25 de Marzo de 2015	Localizar los elementos de la elipse (focos, vértices) y establecer relaciones entre sus distancias con respecto a un punto P.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada tarde.

6. ¿Cuál es el concepto de elipse?	27 de Marzo de 2015	Deducir el concepto de elipse después de haber realizado las actividades anteriores y con el desarrollo de un ejercicio utilizando las coordenadas de cada uno de los elementos de la elipse.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada tarde.
7.Construcción de las trayectorias de los cuerpos celestes	3 y 5 de Abril de 2015	Aplicar la tercera ley de Kepler para la construcción de las trayectorias elípticas de los planetas del sistema solar y el cometa Halley.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada tarde.

8. Ejecución de las actividades

Fotografías 1: Proyección de videos sobre cónicas y comentarios en grupos de dos estudiantes (ver actividad sesión 6.1.1).

Fotografías 2: Elaboración de una elipse a través del plegado de papel en dos etapas (ver actividad sesión 6.1.2).

Fotografías 3: Construcción de elipses con diferentes distancias del centro al foco por el método del jardinero (ver actividad Parte A: 6.2.1)

Fotografía 4: Explicación de la aplicación de la ecuación del radio (r), a partir de la tercera Ley de Kepler.

Fotografías 5: Construcción de las trayectorias de los cuerpos celestes (ver actividad parte A: 6.2.4).

Se construyeron las trayectorias elípticas de los planetas Tierra, Marte y Saturno además la trayectoria del cometa Halley. Los datos de los planetas se obtuvieron de la tabla anexa al taller de la actividad 6.2.4.

EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

- Se formulan preguntas abiertas, tal como se muestra en la mayoría de las actividades, para tener como referencia los conocimientos previos de los estudiantes y que puedan deducir y comprender ellos mismos el concepto al que se quiere llegar.

- Las preguntas también consideran aspectos cualitativos y cuantitativos del aprendizaje planteado, con el propósito que los estudiantes demuestren la aplicación de conocimientos específicos, habilidades y actitudes.

- Es muy importante que los estudiantes, durante las actividades, se estén continuamente evaluando ellos mismos (autoevaluación) y que compartan entre los grupos diferentes puntos de vista (coevaluación).

- El trabajar en grupos de trabajo se resalta el trabajo colaborativo, para fomentar el aprendizaje significativo, reflexivo y crítico, donde salen a relucir sus valores, la tolerancia, el respeto, la cordialidad, compañerismo, no solo entre estudiantes, sino también entre estudiantes y docente.

C. Anexo: Segundo proyecto de aula

1. Nombre del proyecto

“La fuerza de gravitación universal y el movimiento de los planetas y satélites”

2. Descripción del tema del proyecto

Según cuenta la historia, Isaac Newton fue golpeado por una manzana mientras dormitaba bajo un árbol, y supuestamente se inspiró a imaginar que todos los cuerpos del universo se atraen entre sí, tal como la manzana es atraída por la Tierra.

El logro de Newton no fue descubrir la gravedad, sino, descubrir que la gravitación es universal. Esta fuerza de atracción gravitatoria depende directamente de las masas de ambos objetos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros.

En este proyecto se va a estudiar la “Ley de la Fuerza Gravitacional”, enfocándola al movimiento de los planetas; se darán respuestas a varios cuestionamientos, entre ellos, se demostrará que las Leyes del movimiento planetario de Johannes Kepler se deducen de esta Ley, así como la determinación de masa de los planetas, la explicación sobre la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre la Luna o los satélites artificiales, entre otros.

El proyecto consta de tres sesiones; una primera se inicia con una sensibilización por parte del docente y un grupo de estudiantes, los cuales, después de una breve conceptualización, les guiarán en la solución de problemas propuestos relacionados con el tema. En una segunda sesión se diseñará y construirá un planetario el cual será el ambiente apropiado para que los estudiantes realicen una serie de exposiciones a niños y niñas del colegio y otras instituciones sobre la gravitación universal y el movimiento de los planetas.

La tercera sesión es la observación directa de los astros en un observatorio astronómico fuera de la institución, cumpliendo el protocolo exigido por la Secretaría de Educación Departamental.

3. Justificación

Es muy importante que los estudiantes comprendan el concepto de Fuerza Gravitacional y una forma muy práctica es que ellos mismos se cuestionen y traten de resolver situaciones relacionadas con el tema.

Hay muchas preguntas que ellos pueden hacerse y tratar de resolverlas en el aula de clase. Es así que los estudiantes pueden hacer grupos de trabajo donde compartan sus conocimientos acerca del tema, estando así, en la capacidad de resolver los siguientes cuestionamientos que los guiarán a comprender el concepto de fuerza gravitacional:

¿En qué influye la masa de los cuerpos en el valor de la Fuerza gravitacional?; ¿Qué influencia tiene en la Fuerza gravitacional, la distancia a la que se encuentran separados los cuerpos?; ¿Qué relación hay entre la fuerza gravitacional y la aceleración centrípeta de la Tierra?; ¿Se puede determinar la fuerza con que los cuerpos son atraídos sobre la Tierra a partir de la fuerza gravitatoria?; ¿Qué relación hay entre la fuerza gravitacional con la intensidad y la energía potencial de un campo gravitatorio?; ¿Es posible deducir la tercera Ley de Kepler a partir de la fuerza gravitacional?.

4. Objetivos

4.1 Objetivo general

Diseñar un proyecto de aula como estrategia didáctica para la comprensión del concepto de fuerza gravitacional, de tal manera que el estudiante pueda establecer su relación con el movimiento de los cuerpos celestes, como los planetas y satélites del sistema solar.

4.2 Objetivos específicos

4.2.1 Conocer el principio de gravitación universal.
4.2.2 Dar aplicabilidad a los conceptos teóricos utilizándolos para resolver situaciones relacionados con la fuerza gravitacional.
4.2.3 Explicar con el principio de la gravitación universal el movimiento de los satélites y aplicarlos al cálculo de la masa de los astros.
4.2.4 Diseñar ambientes adecuados donde los estudiantes realicen exposiciones acordes con el tema propuesto.
4.2.5 Observar el movimiento de los cuerpos celestes mediante la utilización de telescopios.

5. Metodología

El proyecto de aula aplicado a 30 alumnos de décimo y undécimo grado de la jornada de la tarde, consta de tres sesiones didácticas, a saber:

Una primera sesión teórica relacionada con la aplicación de la fuerza gravitacional, donde los estudiantes trabajarán en forma grupal o individual la solución de diversas situaciones problemáticas resumidas en cinco preguntas claves(A, B, C, D, y E). Se explican con ejemplos la solución a varios problemas relacionados con cada una de estas y se dan algunos problemas propuestos para que los solucionen los estudiantes.

Para lo anterior se designan un grupo de estudiantes monitores que junto con el docente realizarán exposiciones y los guiarán al desarrollo y evaluación de la sesión.

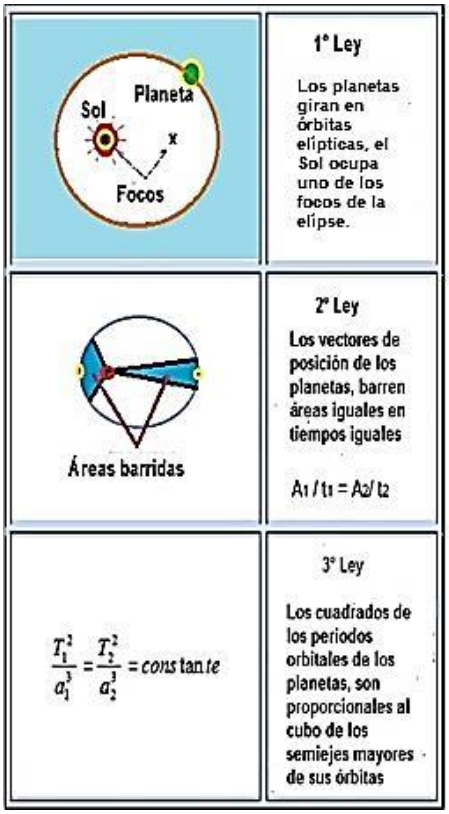
La segunda sesión donde los estudiantes montarán un pequeño planetario construido por ellos mismos y donde realizan diversas exposiciones sobre el descubrimiento de la fuerza gravitacional y sus consecuencias.
La tercera y última sesión es la visita de los estudiantes al observatorio astronómico de Zaquencipa- Villa de Leiva- Boyacá, con el fin de realizar observaciones directas de los cuerpos celestes utilizando telescopio de largo alcance.

6. Fases de desarrollo

PRIMERA SESIÓN

Motivación

Mientras Nicolás Copérnico (1473-1543) propuso una hipótesis revolucionaria para explicar el movimiento planetario: el Sol pasaba a ser el centro del sistema y los planetas se movían en órbitas circulares en torno suyo, Johannes Kepler (1571-1630) enunció las leyes del movimiento planetario, conocidas como las Leyes de Kepler.



Movimiento planetario

Lo que debes saber acerca de la Ley de la Fuerza gravitacional

Figura 1: Leyes del movimiento planetario de Johannes Kepler**.**

Leyes de Kepler

- Los planetas describen órbitas elípticas, estando el sol en uno de sus focos.
- El vector de posición de cualquier planeta con respecto del Sol (vector que tiene el origen en el Sol y su extremo en el planeta considerado) barre áreas iguales en tiempos iguales.

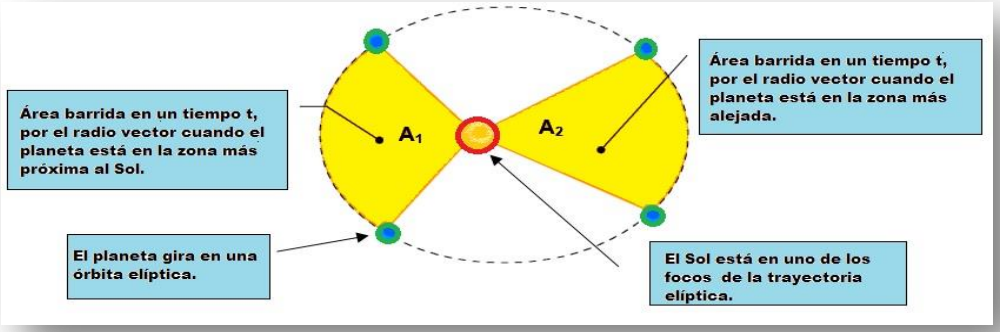
En la figura (si se supone que t es el mismo): $A_1 = A_2$

De forma general: $\frac{A_1}{t_1} = \frac{A_2}{t_2}$

Los cuadrados de los periodos de revolución (T) son proporcionales a los cubos de las distancias promedio de los planetas al sol (r):

$T^2 = k\,r^3$ donde k es una constante de proporcionalidad (constante de Kepler)

La distancia promedio, r coincide con el valor del semieje mayor para órbitas elípticas:



¿Qué tan elíptica es la órbita terrestre?

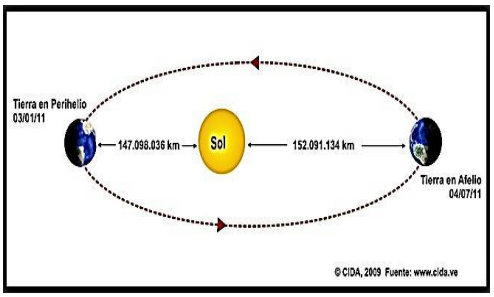


Figura 1: El perihelio es el punto más cercano de la órbita Tierral - Sol y tiene una distancia aproximada de 147. 098.036 Km.

La distancia de la Tierra al Sol en el punto más alejado (afelio) es de 152.091.134 km.

La diferencia aproximada es de 5.000.000 km, parece ser considerable, pero apenas representa un 3% de diferencia entre ambos valores,

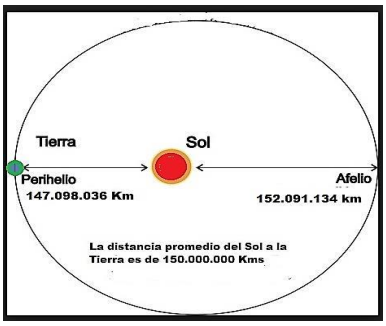


Figura 2: Se muestra la órbita de la Tierra, cuya excentricidad tiene un valor aproximado de e= 0,0167 lo cual corresponde a una elipse, muy diferente a la excentricidad e=0 con una órbita circular.

Entre mayor es la excentricidad la órbita es una elipse más aplanada o alargada

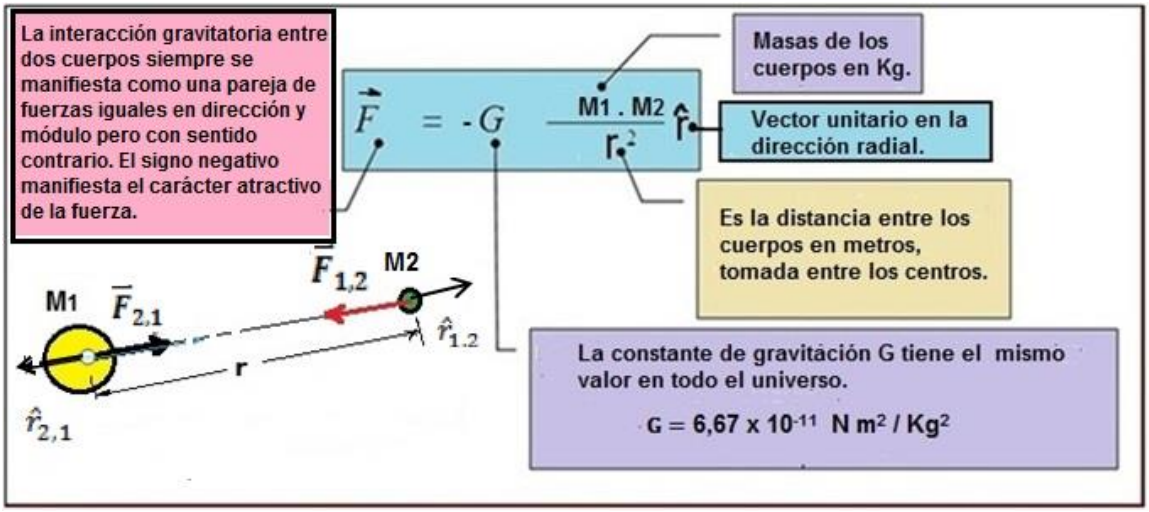
Isaac Newton (1642 - 1727), comparó la aceleración de la Luna con la aceleración de los objetos en la Tierra y creía que la fuerza gravitacional era la responsable, tal es así que logró sacar una conclusión importante sobre la dependencia de la gravedad y la distancia, refiriéndose a que la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y otros objetos es inversamente proporcional a la distancia que separa al centro de la Tierra y el del objeto y directamente proporcional a la masa de la Tierra.

Newton dio un gran paso en la explicación del movimiento planetario al enunciar su Ley de Gravitación Universal (formulada en 1666 y publicada en 1687).

Ley de Gravitación Universal ***"Los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa."***

Video "La manzana y la Luna"

Tomado del siguiente link: https://www.youtube.com/watch?v=wG5dsN5woNY"



A. PREGUNTA PROBLEMA

¿En que influye la masa de los cuerpos en el valor de la Fuerza gravitacional?, ¿Qué influencia tiene en la Fuerza gravitacional, la distancia a la que se encuentran separados los cuerpos?

EJERCICIOS PROPUESTOS

Problema A1

Analice con su compañero(a) la proporcionalidad de la fuerza gravitacional con respecto a la masa de dos objetos. En un primer caso se varía(n) la(s) masa manteniendo constante la distancia que los separa; en un segundo caso, se varía la distancia entre los objetos, manteniendo constante la masa de ambos objetos.

Problema A2. Supongamos que dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de 8 unidades. Si se duplica la distancia entre los dos objetos ¿Cuál es la nueva fuerza de atracción entre los dos objetos?

a. 16 unidades b. 8 unidades c. 4 unidades d. 2 unidades

Problema A3. Supongamos que dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de 8 unidades. Si la distancia entre los dos objetos se reduce a la mitad, entonces ¿cuál es la nueva fuerza de atracción entre los dos objetos?

a. 32 unidades b. 64 unidades c. 8 unidades d. 16 unidades

Problema A4. Supongamos que dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de 16 unidades. Si se duplica la masa de ambos objetos, y si la distancia entre los objetos sigue siendo el mismo, entonces ¿cuál sería la nueva fuerza de atracción entre los dos objetos?

a. 16 unidades b. 64 unidades c. 2 unidades d. 32 unidades

Problema A5. Supongamos que dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de 16 unidades. Si se duplica la masa de ambos objetos, y si se duplica la distancia entre los objetos ¿cuál es la nueva fuerza de atracción entre los dos objetos?

a. 16 unidades b. 8 unidades c. 2 unidades d. 32 unidades

Problema A6. Supongamos que dos objetos se atraen entre sí con una fuerza gravitacional de 8 unidades. Si se triplicó la masa de ambos objetos, y si se duplica la distancia entre los objetos ¿cuál sería la nueva fuerza de atracción entre los dos objetos?

a. 16 unidades b. 8 unidades c. 18 unidades d. 64 unidades

Problema A7. Pregunta de ensayo

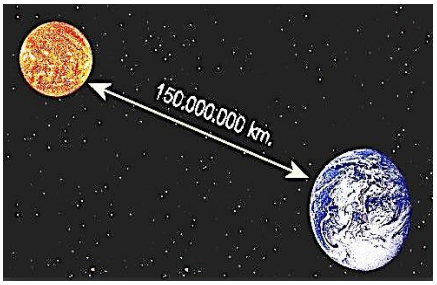


Figura 3: Si la masa del Sol Ms = 1,99 x 10^{30} Kg y la de la Tierra Mt = 5,98 x 10^{24} Kg y la distancia promedio del Sol a la Tierra es 1,496 x 10^{11} m a) ¿cuál es la fuerza gravitacional que ejerce el Sol? B) ¿la Tierra sobre el Sol? c)¿en qué dirección actúan esas fuerzas?

Problema A8. Pregunta de ensayo

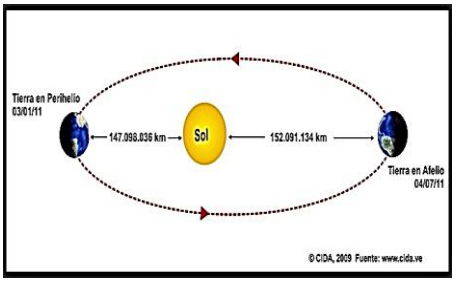


Figura 4: Distancias del Afelio y el Perihelio Tierra – Sol.

Se observa la distancia más larga de la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es de aproximadamente 15,3 x 10^{7} Km, momento en que la Tierra se mueve con una velocidad aproximada 30 Km/s, calcular la velocidad con que se moverá en el perihelio, si en ese momento la distancia es de 14,8 x 10^{7} Km.

B. PREGUNTA PROBLEMA

¿Se puede determinar la fuerza con que los cuerpos son atraídos sobre la Tierra a partir de la fuerza gravitatoria?

Lo que debes saber

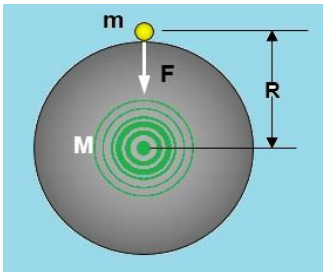


Figura 7: Cuerpo sobre la superficie de la Tierra.

A partir de $F = G\,\frac{mM}{R^2}$, teniendo en cuenta que un cuerpo experimenta una fuerza gravitatoria de magnitud P = mg, donde g es la aceleración en caída libre cerca de la superficie; se puede igualar las dos expresiones y obtener $g = G\,\frac{M}{R^2}$ donde el peso $P = m\left[G\,\frac{M}{r^2}\right]$

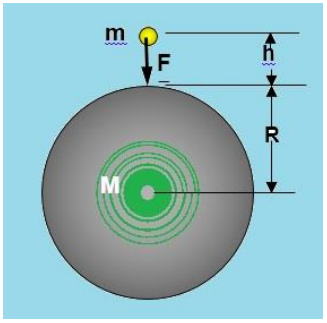


Figura 8: Cuerpo a una altura h de la superficie de la Tierra.

Si se considera el cuerpo m a una altura h sobre la superficie terrestre o a una distancia r del centro, donde $r = R + h$

Por tanto $g' = G\,\frac{M}{[R+h]^2}$ y $P = m\left[G\,\frac{M}{[R+h]^2}\right]$

EJERCICIOS RESUELTOS

Debido a que la constante gravitacional es muy pequeña, la fuerza gravitacional es notoria e intensa, cuando la masa de los cuerpos es bastante apreciable.

En los siguientes ejemplos se ilustra lo anterior.

Ejemplo B1

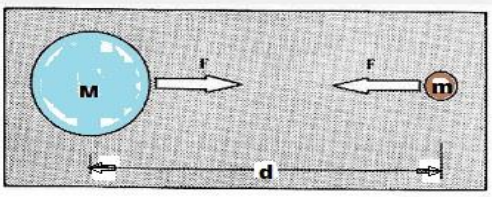


Figura 5: Dos cuerpos relativamente pequeños.

Si dos cuerpos con masas de 150 y 2500 Kg, se encuentran distanciados 30 m ¿cómo se puede determinar la fuerza con que atraen?

Solución:

$$F = G\,\frac{mM}{R^2} \qquad F = 6{,}67\ x\ 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}\frac{150Kg\ \ x\ 2500Kg}{30^2m^2} = 2{,}78\ x10^{-7}\ N$$

El valor pequeño de la magnitud de la fuerza se debe a que hay un factor muy pequeño, que es el valor de G. Por lo tanto, si las masas de los cuerpos que se atraen son muy pequeñas (relacionadas con la masa de los cuerpos celestes) la multiplicación por G es muy pequeña y el módulo de la fuerza también lo será, tanto que es inapreciable.

Ejemplo B2

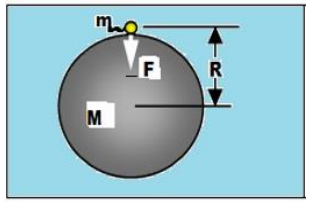


Figura 6: Cuerpo sobre la superficie de la Tierra.

Ahora bien, tomemos un cuerpo más grande como un planeta, en este caso la Tierra (5,98 x 10^{24} Kg) y un cuerpo de unos 50 Kg, situado en la superficie de la Tierra (Radio de la Tierra 6,37 x 10^{6} m), la magnitud de la fuerza con que se atraen será: $F = G\ \frac{mM}{R^2}$.

Solución:

$$F = 6{,}67\ x\ 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}\frac{5{,}98\ x\ 10^{24}\ Kg\ x\ 50Kg}{(6{,}37\ x\ 10^{6}\ )^{2}m^2} = 491{,}49\ N$$

La magnitud de la fuerza es bastante apreciable debido a la masa de la Tierra.

En otras palabras, lo que se está preguntando es cuál es el peso con qué la Tierra atrae a un cuerpo en su superficie o alejada una distancia determinada.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Utilice la ecuación de la Fuerza Gravitacional para analizar las siguientes situaciones y escoja la respuesta correcta, tenga en cuenta los siguientes datos más precisos.Masa de la Tierra; M_T=5,98·10^{24} kg; radio de la Tierra, R_T=6.370 km= 6,37·10^{6} m; masa de la Luna, M_L=7,34 x 10^{22} kg; Radio de la Luna, R_L=1.740 km = 1,74x 10^{6} m; distancia entre la Tierra y la Luna, *d*=384000 km=384 x 10^{6} m.

Problema B1.

Determinar la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y un estudiante de física de 70 kg si el estudiante está a nivel del mar a una distancia de 6,37 x 10^{6} m del centro de la tierra.

a. 585,87N b. 686,07N c. 688,09 N d. 510,06N

Problema B2.

Determinar la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y un estudiante de física de 70 kg si el estudiante está en un avión a 12,192 x 10^{3} m sobre la superficie de la tierra. Esto colocaría al estudiante una distancia de 6.39 x 10^{6} m del centro de la tierra.

a. 685,46N b. 684,78N c. 689,88 N d. 510,98N

Problema B3. Con respecto a las dos situaciones anteriores ¿Cuál de las siguientes observaciones considera la correcta?

a. La diferencia entre las dos fuerzas es de 2,63 N que significa que el estudiante pesa menos a mayor altitud, pero el cambió de 12,192 x 10^{3} m más lejos del centro de la Tierra es significante.

b. La diferencia entre las dos fuerzas es de 3,31 N que significa que el estudiante pesa más a mayor altitud, pero el cambió de 12,192 x 10^{3} m más lejos del centro de la Tierra es significante.

c. La diferencia entre las dos fuerzas es de 2,63 N que significa que el estudiante pesa menos a mayor altitud, pero el cambió de 12,192 x 10^{3} m más lejos del centro de la Tierra es insignificante.

d. La diferencia entre las dos fuerzas es de 3,31 N que significa que el estudiante pesa menos a mayor altitud, pero el cambió de 12,192 x 10^{3} m más lejos del centro de la Tierra es insignificante.

C. PREGUNTA PROBLEMA
¿Qué relación hay entre la fuerza gravitacional y la aceleración centrípeta de la Tierra?

EJERCICIOS RESUELTOS

Para poder relacionar la Ley de la Fuerza Gravitacional con la dinámica del movimiento circular, se hace la suposición de una trayectoria circular de un planeta alrededor del Sol o de un satélite alrededor de un planeta.

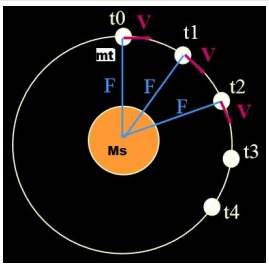


Figura 9:Un planeta alrededor del Sol

$$F = m\,a \;;\; F = G\,\frac{m\;M}{R^{2}}$$

$$m\,a = G\,\frac{m\,M}{R^{2}} \;;\; a = g = G\,\frac{M}{R^{2}}$$

Ejemplo C1. Se toma en cuenta que la masa del Sol es 1,98 x 10^{30} Kg y la distancia media del Sol-Tierra es de 1,5 x 10^{11} m, la fuerza "F" hace que la masa de la Tierra " m_t " no caiga hacía el Sol. ¿cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra?

Solución:

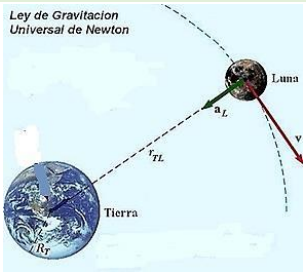
Igualando las dos fuerzas

Se obtiene la aceleración que no depende de la masa del cuerpo sino de la masa del planeta y su radio orbital.

Para el ejemplo anterior considerando que la órbita de los planetas es más o menos circular la aceleración centripeta de la Tierra es:

$$a = G\,\frac{M_S}{R^2} = 6{,}67\;x\;10^{-11}\;\frac{Nm^2}{Kg^2}\,\frac{1{,}98\;x\;10^{30}Kg}{(1{,}5\;x\;10^{11})^{\,2}m^2} = 5{,}87\;x\;10^{-3}\;\frac{m}{s^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS



Problema C1: Se toma en cuenta que la masa de la Tierra es 5,98 x 10^{24} Kg y la distancia media del Tierra – Luna es 3,84 x 10^{8} m, la fuerza "F" hace que la Luna no caiga hacía la Tierra ¿cuál es la aceleración centrípeta de la Luna?

a. 3,70 x 10^{-3} m/s^2 b. 2,70 x 10^{-3} m/s^2 c. 4,70 x 10^{-3} m/s^2 d. 2,70 x 10^{3} m/s^2

Problema C2: La Luna permanece en su órbita alrededor de la Tierra y no cae sobre ella debido a:
a) que está fuera de la influencia gravitatoria de la Tierra b) que está en equilibrio con las fuerzas gravitacionales del Sol y otros planetas c) que las fuerzas netas en la Luna es cero d) ninguna de ellas.

D. PREGUNTA PROBLEMA

¿Qué relación hay entre la fuerza gravitacional con la intensidad y la energía potencial de un campo gravitatorio?

Lo que debes saber acerca del campo gravitatorio "

Te has preguntado ¿cómo es posible que se ejerzan fuerzas entre dos objetos (por ejemplo dos cuerpos celestes) sin que haya nada entre ellos?, ¿qué mecanismo de interacción existe existe para que se produzca esta atracción?, ¿crees que la Tierra es completamente esférica?

Motivación

¿Qué tan esférica es la Tierra?

Es muy importante hoy en día conocer las aplicaciones que tiene el conocer el valor del campo gravitatorio en la superficie terrestre. Como se sabe, la Tierra tiene muchas protuberancias y depresiones. En la siguiente fotografia nos muestra un mapa tridimensional del planeta elaborado desde el observatorio espacial GOCE, de la Agencia Europea del espacio (ESA), cuya misión era medir el campo gravitatorio de la Tierra con gran presición.

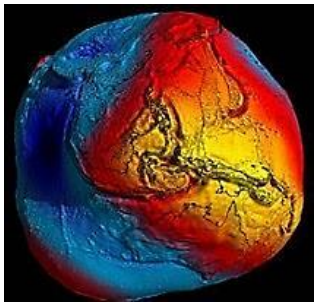


Figura 10 : Mapa de la Tierra afectada por la gravedad que muestra un geoide equivalente a una superficie equipotencial tridimensional (una especie de bola arrugada), cuyos estudios tiene aplicaciones en oceanografía, geofísica, en geodesia, en glaciología y en climatología.

En vista de lo anterior la intensidad del campo gravitatorio varía con la altura y la profundidad. Otras de las aplicaciones es la explicación de las mareas oceánicas que fueron un misterio hasta que Newton las interpreto con su teoría gravitatoria. Que hoy en día se conoce como fuerzas de marea. En el siguiente link del departamento de Física y Química en línea del IES " Leonardo Da Vinci" te explica con detalles este fenómeno:
http://intercentres.edu.gva.es/iesleonardodavinci/Fisica/Campo_gravitatorio/Campo_gravitatorio10.htm

Campo gravitatorio "$\vec{g}$" deducida a partir de la Fuerza Gravitacional "$\vec{F}$"

¿Qué es un campo? Es una región en el espacio donde existen una serie de propiedades representadas por magnitudes físicas vectoriales o escalares. Si la magnitud física es una fuerza, entonces se puede hablar de un campo vectorial de fuerzas; un campo gravitatorio es por tanto un campo vectorial de fuerzas cuya magnitud activa es la masa.

Figura 11: Campo gravitacional "$\vec{g}$" de la Tierra que se puede asimilar como una esfera con una masa distribuida en forma homogénea con líneas de campo radiales.

El campo gravitacional "$\vec{g}$" , se puede calcular a partir de la fuerza gravitacional y la masa del objeto (partícula) de prueba:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{G\frac{M\,m\,\hat{r}}{r^2}}{m} = -\,G\,\frac{M}{r^2}\,\hat{r}$$

Esta sería la expresión para calcular el campo gravitatorio de un cuerpo cercano a la superficie terrestre.

En un punto situado a una altura h (grande) de la superficie terrestre la intensidad del campo gravitatorio se emplea $\vec{g} = -G \frac{M}{(r+h)^2} \hat{r}$ sus unidades están dadas en unidades de aceleración.

Principio de superposición. Es un principio muy importante y permite resolver situaciones relacionadas con la fuerza gravitacional, así como los relacionados con campos gravitacionales y potencial gravitacional

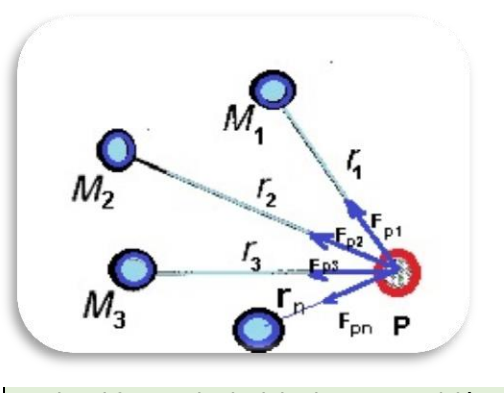


Figura 12: Fuerzas gravitatorias en un conjunto de masas.

El principio de superposición se enuncia así:

Si dos cuerpos de masas M_1 y M_2 interactúan con una tercera masa (localizada en el punto P) la fuerza de atracción que ejerce el sistema (1,2) sobre P es la suma vectorial de las fuerzas de atracción que ejercen independientemente M_1 y M_2 sobre P. Para M_n masas la fuerza total será:

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{p1} + \vec{\mathbf{F}}_{p2} + \vec{\mathbf{F}}_{p3} + \cdots \vec{\mathbf{F}}_{pn}$$

De igual forma el principio de superposición se puede aplicar a campos gravitatorios, energías potenciales, creados en el punto P por cada una de las masas M_1, M_2, M_3,…M_n por separado**.**

$$\vec{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{g}}_{p1} + \vec{\mathbf{g}}_{p2} + \vec{\mathbf{g}}_{p3} + \cdots \vec{\mathbf{g}}_{pn}$$ Para campos gravitatorios

$$\overrightarrow{\mathbf{Ep}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{Ep}}_{p1} + \overrightarrow{\mathbf{Ep}}_{p2} + \overrightarrow{\mathbf{Ep}}_{p3} + \cdots \mathbf{Ep}_{pn}$$ Para energías potenciales de los campos

EJERCICIOS RESUELTOS

Para poder relacionar la Ley de la Fuerza Gravitacional con la dinámica del movimiento circular, se hace la suposición de una trayectoria circular de un planeta alrededor del Sol o de un satélite alrededor de un planeta.

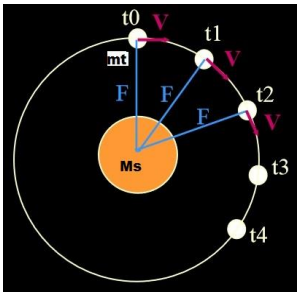


Figura 13:Un planeta alrededor del Sol

$$F = m\,a \;;\; F = G \frac{m\;M}{R^2}$$

$$m\,a = G \frac{m M}{R^2} \;;\; a = g = G \frac{M}{R^2}$$

Ejemplo D1.

Se toma en cuenta que la masa del Sol es 1,98 x 10^{30} Kg y la distancia media del Sol-Tierra es de

1,5 x 10^{11} m, la fuerza "F" hace que la masa " m_t ", haciendo que la Tierra no caiga hacía el Sol.

Solución:

Igualando las dos fuerzas

Se obtiene la aceleración que no depende de la masa del cuerpo sino de la masa del planeta y su radio orbital.

Para el ejemplo anterior considerando que la órbita de los planetas es más o menos circular la aceleración centripeta de la Tierra es:

$$a = G\,\frac{M_S}{R^2} = 6{,}67\ x\ 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}\,\frac{1{,}98\ x\ 10^{30}Kg}{(1{,}5\ x\ 10^{11})^{\,2}m^2} = 5{,}87\ x\ 10^{-3}\ \frac{m}{s^2}$$

El campo gravitacional $\vec{g}$ tendría el mismo valor

Ejemplo D2. Una persona cuya masa es de 80 Kg se encuentra cerca a la superficie terrestre, ¿cual será el valor del campo gravitacional? y ¿cual es el valor energia potencial del campo gravitatorio?

Solución

Para calcular la intensidad del campo gravitacional no tenemos en cuenta la masa del cuerpo, solamente la masa de la Tierra (5,98 x 10^{24} Kg) y el radio promedio

$$\vec{g} = -\ G\,\frac{M}{r^2}\,\hat{r} \qquad \vec{g} = 6{,}67\ x\ 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}\,\frac{5{,}98\ x\ 10^{24}Kg}{(6{,}37\ x\ 10^{6}\ )^{\,2}m^2} = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}.$$

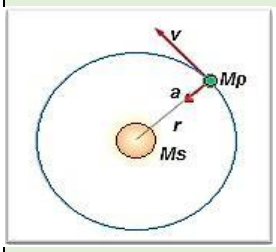
Para calcular la energía potencial del campo gravitatorio $Ep(r)$se tiene en cuenta la masa del cuerpo y la masa de la Tierra, así como la distancia que los separa, en este caso por estar cerca a la superficie terrestre la distancia es el radio de la Tierra.

$$\overrightarrow{Ep}\ (r) = -\ G\,\frac{Mm}{r}\,\hat{r} \qquad Ep\ (r) = 6{,}67\ x\ 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}\,\frac{5{,}98\ x\ 10^{24}Kg\ X\ 80Kg}{(6{,}37\ x\ 10^{6}\ )} = 5\ X\ 10^{9}\ J$$

E. PREGUNTA PROBLEMA
¿Es posible deducir la tercera Ley de Kepler a partir de la Fuerza Gravitacional?

Es posible deducir la Tercera Ley de Kepler a partir de la Ley de Fuerza Gravitacional de Newton, teniendo en cuenta algunas consideraciones.

Figura 12: Planeta orbitando alrededor del Sol



Sea Ms la masa del Sol y Mp la masa del planeta y r la distandia que los separa, la fuerza gravitacional proporciona la aceleración centrípeta del planeta el cual se mueve circularmente. Si la aceleración centrípeta del planeta a_c separado una distancia r del Sol es $a_{c=}\ \omega^2\ r$ donde ω es la velocidad angular.

Al ser la órbita circular, la fuerza gravitacional $F = G\,\frac{Mp\,Ms}{r^2}$ coincidirá con la fuerza centrípeta $F_{c=M_p}\,a_c$ y considerando $\omega = \frac{2\pi}{T}$ se obtiene $G\,\frac{MpMs}{r^2} = Mp(\frac{2\pi}{T})^2\ r$; despejando el período $T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{GM_s}\right]r^3$ se llega a la Tercera Ley de Kepler $T^2 = Kr^3$; K es una constante que se obtiene conociendo la masa del Sol.

Si la órbita es elíptica para calcular a K se tiene en cuenta que r es la distancia media del Sol al planeta y T es el periodo de revolución , tenemos que K = $\frac{T^2}{r^3}$ $(s^2\ /\ m^3\ )$.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo E1. Para el sistema solar la cosntante K tiene un valor, donde M es la masa del Sol ¿Cuál es el valor de K?

Solución:

$K = \left[\frac{4\pi^2}{GMs}\right]$; reemplazando los valores

$$K = \frac{4\pi^2}{6{,}67\ x\ 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}\ 1{,}98\ x\ 10^{30}\ Kg} = 2{,}99 \text{ x } 10^{-19}\ \frac{s^2}{m^3}$$

En la tabla siguiente se brindan datos útiles sobre los planetas y se comprueba que $T^2/_{r^3}$ es una constante cuyo valor es la que se obtiene con la masa del Sol y que es independiente en primera aproximación de la masa del planeta considerado.

Datos de utilidad de los planeta

Planetas	Masa (Kg)	Radio Medio (m)	Período de Revolución (s)	Distancia Media desde el Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Jupiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Pluton	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—	—

Tabla 1 : Datos del sistema solar

Tomado de la Física de Raymond A, Serway A, sexta edición. Pág. 399

Ejemplo E2. Utilizando la tabla anterior, demostrar que la masa del sol es 1,991 x 10^{30} Kg a partir del periodo de la Tierra y la distancia que hay entre el Sol y la Tierra.

Solución.

De acuerdo a la demostración anterior el periodo está determinado por la expresión

$T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{GM_S}\right] r^3$ donde r es la distancia del Sol a la Tierra y T es el periodo de la Tierra.

Despejando M se tiene $M_S = \left[\frac{4\pi^2}{GT^2}\right] r^3$ $M_S = \left[\frac{4\pi^2}{6{,}67\ x\ 10^{-11}(3{,}156\ x10^7\ s)^2}\right](1{,}496x10^{11})^3 = 1{,}989x10^{30}\ Kg$

Ejemplo E3. Hallar la expresión de la tercera Ley de Newton en términos de aceleración gravitacional (g) en la superficie y del radio terrestre a) a nivel de la superficie de la Tierra y b) a una altura h sobre la superficie de la Tierra.

Solución

Como se explicó en la pregunta problema C, la aceleración g está dada por la expresión:

$a)\ g = G\,\frac{M_T}{{R_T}^2}$, $GM_T = g{R_T}^2$, de esta manera se reemplaza GM_T en $T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{GM_T}\right]{R_T}^3$ se obtiene $T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{g{R_T}^2}\right]{R_T}^3$

b) Si el cuerpo se encuentra a una altura h, la aceleración en caída libre será

$g = G\,\frac{M}{(R_T)^2}$, se tiene $T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{g(R_T)^2}\right](R_T + h)^3$

Ejemplo E4. El semieje mayor de la órbita de Marte es de 225x10^6 Km y su periodo es de 1,9 años. Sabiendo que la órbita del planeta Júpiter es casi circular, ¿cuánto valdrá su radio orbital si su periodo es de 11,9 años?

Solución:

El semieje mayor de una órbita circular es su radio, así que aplicando La 3ª ley de Kepler:

$\frac{{r_m}^3}{{T_m}^2} = \frac{{r_j}^3}{{T_j}^2}$, donde los datos "m" son los de Marte y los "j" los de Júpiter

Despejando a_j se tiene que $r_j = \sqrt[3]{\left[\frac{({r_m}^3\ x\ {T_j}^2)}{{T_m}^2}\right]}$ reemplazando valores

$r_j = \sqrt[3]{\left[\frac{(225\text{x}10^6\ \text{Km})^3\ (11{,}9\ años)^2)}{(1{,}9\ años)^2}\right]}$ = 764, 50 x 10^6 Km

Ejemplo E5.

Figura 13: Satélite geoestacionario.

Un satélite geoestacionario (siempre en el mismo punto del planeta y el período de un satélite estacionario es 24 h) está a 36.000 Km sobre la superficie de la Tierra. ¿Qué periodo tiene otro situado a 4000 Km de altura?

Solución:

Se supone que los dos satélites siguen órbitas circulares de radios R_1 = 36.000 Km + 6.400 Km = 42.400 Km y R_2 = 4.000 Km + 6.400 Km =10.400 Km, se hace uso de la Tercera Ley de Kepler

$\frac{{R_1}^3}{{T_1}^2} = \frac{R^3}{{T_2}^2}$; $\frac{(42.400\ Km)^3}{(24h\ )^2} = \frac{(10.400\ Km\ )^3}{{T_2}^2}$ despejando $T_2 = \sqrt[2]{[\frac{(\ 10.400^3 Km^3\ \ x\ \ 24^2\ h^2)}{42.000^3\ Km^3}]} = 2{,}96\ horas$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 1E Tipo ensayo

Figura 14: Satélite cerca de la superficie terrestre.

Se tiene un satélite de 600 kgf de peso cerca de la superficie terrestre.

a) Encontrar su período de rotación alrededor del planeta, b) La aceleración en caída libre a esa altura, c) La velocidad angular (ω = 2π/T) y d) la velocidad lineal (v= R_T. t).

Problema 2E, Tipo ensayo.

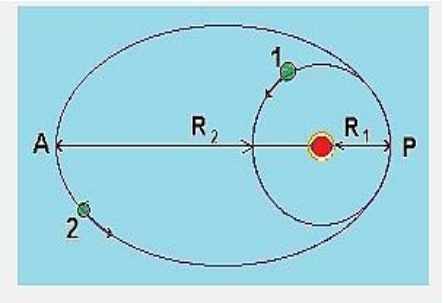


Figura 15: Órbitas de dos planetas.

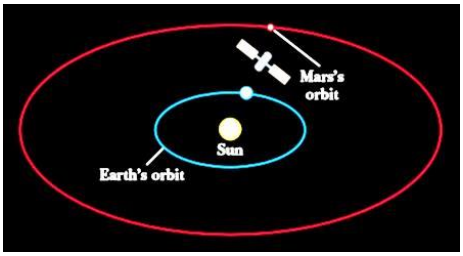
Se encuentran dos planetas que tienen masas iguales y orbitan alrededor de una gran Estrella cuya masa es mucho mayor. El planeta 1 describe una órbita circular de radio $R_1 = 10^9$ km con un periodo de rotación T_1 = 3 años, mientras que el planeta 2 describe una órbita elíptica cuya distancia más próxima es

$R_1 = 10^9$ km y la más alejada es $R_2 = 1{,}8x10^9$ km tal y como muestra la figura 15 ¿cuál es el periodo de rotación del planeta 2?

Ayuda: La tercera Ley de Kepler enuncia que $T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{GM}\right] r^3$; $T^2 = Kr^3$ al despejar a K .

$K = \frac{T^2}{r^3}$, donde r = R por lo que $K = \frac{T^2}{R^3}$; para el planeta 1, $K = \frac{{T_1}^2}{{R_1}^3}$; para el planeta 2,

$K = \frac{{T_2}^2}{R^3}$, donde R es la distancia media del planeta 2, R= (R_1 +R_2)/2 (continúe con el problema).



Problema 3E, Tipo ensayo

Figura 16: Órbitas de la Tierra y Marte.

El semieje mayor de la órbita de la Tierra es de $1{,}496 \times 10^{11}$ m y su periodo es de $3{,}156 \times 10^{7}$ s; sabiendo que el periodo de Marte es $5{,}94 \times 10^{7}$ s, ¿cuánto valdrá su radio orbital?

Problema 4E, Tipo ensayo

Figura 17: Satélites de Marte (Fobos y Deimos).

Suponer que se le pidió determinar la masa aproximada de Marte utilizando la tercera Ley de Kepler

$T^2 = \left[\frac{4\pi^2}{GM}\right] r^3$; se sabe que Marte tiene dos lunas: Fobos y Deimos. Se sabe que Fobos tiene un período orbital de 0,32 días y su órbita casi circular que tiene un radio de 9.380 Km, mientras que Deimos con una órbita aún más circular tiene un periodo orbital de 1,26 días y un radio de 23.460 Km. Calcule la masa de Marte a partir de cada uno de los dos datos.

7. Cronograma de actividades

Actividad	Fecha	Objetivo	Responsables
1.Dar a conocer al estudiante el proyecto y sensibilizarlo acerca de su importancia	11 de Mayo de 2015	Sensibilizar a los estudiantes acerca del proyecto, explicándoles cada una de las sesiones.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
Primera Sesión: "La fuerza de gravitación universal y el movimiento de los planetas y satélites"			
2.Ambientación y motivación mediante la presentación de video "La manzana y la Luna"	13 de Mayo de 2015	Ambientar a los estudiantes sobre la obra de Isaac Newton y su descubrimiento.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
3.Exposiciones acerca de diferentes situaciones relacionados con el tema de Gravitación universal	Mayo 19, 21, 25 de 2015.	Resolver con ejemplos diferentes situaciones que dan respuestas a las preguntas problemas A, B, C, D y E.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Monitores de grado Undécimo y alumnos de décimo de la jornada tarde.
4.Conformación de grupos de dos estudiantes para resolver problemas propuestos relacionados con el tema de Gravitación Universal.	Mayo 27 y 28 de 2015.	Plantear a los grupos de estudiantes problemas relacionados con las preguntas A, B, C, D y E.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Monitores de grado Undécimo y alumnos de décimo.

5.Socialización por parte de los grupos de trabajo	Junio 1, 3 y 9 de 2015.	Socializar los problemas planteados por parte de los grupos, autoevaluando y coevaluándose entre ellos.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Monitores de grado Undécimo y alumnos de décimo de la jornada tarde.
Segunda sesión: “ Construcción de un planetario visto desde un ambiente lunar”			
6. Sensibilización a los estudiantes a realizar el diseño y construcción de un planetario.	25 de Marzo de 2015	Motivar a los estudiantes para que diseñen y construyan un planetario que sirva de ambiente apropiado para explicar el tema de la gravitación universal relacionado con el movimiento de los planetas y satélites.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado Undécimo jornada mañana.
7.Diseño de los planetas y nebulosas	Del 6 al 15 de Abril de 2015.	Diseñar y construir los planetas del sistema solar con el número de satélites y otros cuerpos celestes como nebulosas y galaxias.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado Undécimo jornada mañana.
8.Montaje del planetario en un salón de clase.	Del 16 al 30 de Abril de 2015.	Realizar el montaje del planetario en un salón de clase para crear un ambiente apropiado para los expositores.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado Undécimo jornada de la mañana.
9.Exposiciones sobre el tema de la fuerza gravitacional y el movimiento de los planetas y satélites	Durante el mes de mayo de 2015, los días lunes y viernes dos horas diarias.	Llevar a cabo las exposiciones programadas por los estudiantes de décimo grado a estudiantes de las escuelas y del colegio.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grado décimo de la jornada de la mañana.
10. Visita al observatorio Astronómico de Zaquencipa-Villa de Leiva- Boyacá.	5 y 6 de Septiembre de 2015	Escanear el cielo diurno y nocturno realizando una caminata espacial, para observar el movimiento de los cuerpos celestes, observación del Sol y la Luna con telescopios de largo alcance.	Docente: Eduardo Santos, padres de familia, estudiantes de grado décimo y undécimo de ambas jornadas.

8. Ejecución de actividades de la primera sesión

Fotografía 1: Exposición de estudiantes

Fotografía 2: Participación de estudiantes

Fotografía 3: Estudiantes resolviendo problemas propuestos

EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

- Con preguntas de selección múltiple con única respuesta, de tipo ensayo tal como se muestra en los problemas propuestos, para tener como referencia los conocimientos previos de los estudiantes, y las explicaciones en las exposiciones.

- Las exposiciones se deben preparar previamente y revisadas por el docente el cual dará algunas recomendaciones a los estudiantes.

- Las preguntas también consideran aspectos cualitativos y cuantitativos del aprendizaje planteado, con el propósito que los estudiantes demuestren la aplicación de conocimientos específicos, habilidades y actitudes.

- Se realiza evaluación formativa, la cual permite retroalimentar, orientar y asesorar a los estudiantes sobre el aprendizaje.

- Es muy importante que los estudiantes durante las actividades se estén continuamente evaluando ellos mismos (autoevaluación) y que compartan entre los grupos diferentes puntos de vista (coevaluación).

- El trabajar en grupos de trabajo se resalta el trabajo colaborativo, el cual es muy importante para fomentar el aprendizaje significativo, reflexivo y crítico, donde salen a relucir sus valores, la tolerancia, el respeto, la cordialidad, compañerismo, no solo entre estudiantes, sino también entre estudiantes y docente.

SEGUNDA SESIÓN

“Construcción de un planetario visto desde un ambiente lunar”

1. Objetivo

Motivar a los estudiantes al estudio de la Astronomía mediante la construcción de un Planetario donde expondrán a los estudiantes del colegio y otras instituciones temas relacionados con los cuerpos celestes y la fuerza gravitacional.

2. Justificación

Se hace necesario despertar y encausar el interés de los niños, niñas y jóvenes hacía la ciencia y esto puede lograrse transmitiendo y potenciando la utilización de herramientas pedagógicas divertidas y atrayentes para la enseñanza de la ciencia y la Astronomía, basadas en el diseño y construcción de un planetario, utilizando materiales reciclables del entorno.

3. Metodología

La primera etapa consiste en sensibilizar al estudiante a crear un ambiente adecuado para realizar sus exposiciones relacionadas con el movimiento de los cuerpos celestes y la Fuerza Gravitacional, dirigida a sus compañeros del mismo colegio y otras instituciones de su entorno vecino.

La segunda etapa es el diseño y construcción del planetario iniciando con la elaboración de los planetas, sus satélites y asteroides que conforman el sistema solar.

La tercera etapa será la elaboración de un video donde muestren los resultados obtenidos en cada una de las fases del proyecto complementando la parte teórica de la primera sesión.

4. Fases de desarrollo

4.1 Actividad de sensibilización

4.1.1 Objetivo

Motivar al estudiante al estudio de la Astronomía mediante exposiciones

Tiempo: 60 minutos **Grados**: estudiantes de grado décimo y undécimo.

4.2. Diseño de los planetas y nebulosas

Tiempo: 1 semana **Grado**: décimo **Jornada:** Tarde

4.2.1 Objetivo

Realizar la construcción de los planetas del sistema solar con el número de satélites consultando las características y el diseño del Sol y otros cuerpos celestes como las nebulosas y galaxias.

4.2.2 Materiales

- Esferas de Icopor de diferentes diámetros, alambre, cemento blanco, oleos y vinilos, pinceles, fotografías de los planetas y nebulosas, spray, madera, plástico, chinches. Manguera de luces, luces de navidad.

4.2.3 Desarrollo de la actividad

- ✓ Construcción de los planetas
- ✓ Utilizar bolas de Icopor de diferentes diámetros y atravesarles dos alambres gruesos en forma de cruz, hacer diferentes vueltas con alambre más delgado para hacer las elípticas de acuerdo a cada planeta.
- ✓ Recubrir con capas de cemento blanco dando la textura a los planetas.
- ✓ Utilizar temperas, pinturas acrílicas para darle la apariencia característica a cada planeta

de acuerdo a fotografías impresas a color de cada planeta.

- ✓ Utilizar bolas de Icopor de diferentes tamaños y abrirlas para colocárselas a las órbitas descritas en alambre, se pintan para darle apariencia de lunas.
- ✓ Se realiza el montaje del Sol y sus planetas en sus elípticas realizadas con manguera de luces.
- ✓ Construir las nebulosas y galaxias en marcos de madera pintadas en plástico transparente, utilizando spray de diferentes colores.

4.3 Montaje del planetario en un salón de clase

Tiempo: 15 días **Grado:** 30 estudiantes de décimo y undécimo **Jornada**: Tarde

4.3.1 Objetivo

Realizar el montaje del planetario en un salón de clase para crear un ambiente que sea utilizado por los expositores y sea visitado por los estudiantes de las diferentes sedes y otras instituciones.

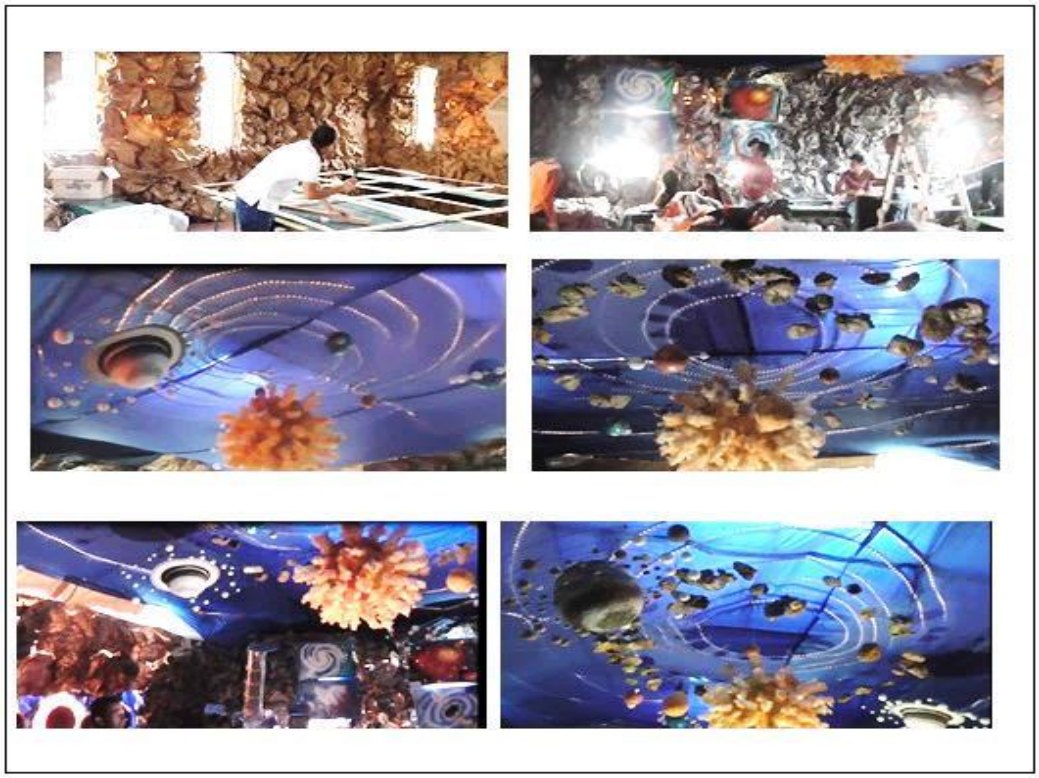
4.4 Materiales

Papel de azúcar utilizado para el bocadillo, manguera de luces, tela azul, plástico negro, sistema planetario, nebulosas y otros cuerpos celestes, listones de madera, silicona, alambre.

5. Ejecución de actividades de la segunda sesión

Fotografía 1: Construcción de planetas y satélites.

Fotografía 2: Construcción de nebulosas y galaxias



Fotografía 3: Montaje del planetario

Fotografía 4: Exposiciones sobre la Fuerza Gravitacional y el movimiento de los cuerpos celestes.

TERCERA SESIÓN

"Una caminata espacial para observar los cuerpos celestes"

Tiempo: Un día y una noche **Grado**: 30 estudiantes de décimo y undécimo **Jornada:** Tarde y mañana

Lugar: Observatorio astronómico de Zaquencipa, localizado a 14.5 Km del municipio de Villa de Leyva- Boyacá- Colombia, vía al convento de Santo Ecce- Homo.

1. Objetivo

Escanear el cielo diurno y nocturno realizando una caminata espacial sin tener que abandonar la Tierra, donde los estudiantes pueden observar el movimiento de los cuerpos celestes y compartir las historias de las culturas antiguas, que sin las tecnologías avanzadas de hoy exploraban continuamente el cielo.

2. Justificación

Es muy importante que los estudiantes complementen la parte teórica acerca de la fuerza gravitacional con la experiencia práctica, y que significativo que ellos mismos experimenten una aventura espacial sin necesidad de salir del espacio terrestre, lo anterior es posible lograrlo si se aprovecha la tecnología como herramienta pedagógica donde se transmiten a los estudiantes conocimientos de Astronomía, visitando un observatorio astronómico con telescopio de alta resolución.

Los estudiantes tendrán la oportunidad de potenciar su conocimiento realizando observaciones directas del astro Sol y observando nuestro satélite más cercano, la Luna, y posiblemente si el tiempo lo permite es posible observar otros planetas de nuestro sistema solar.

3. Metodología

Se inicia con una preparación previa donde los estudiantes realizan una serie de exposiciones por grupos de estudiantes donde se estudian las características principales del Sol, la Luna, los viajes realizados a la Luna, las características principales de cada uno de los planetas del sistema solar, telescopios, las clases de telescopios que han sido utilizados para escanear el cielo.

Luego se procede a realizar la práctica al observatorio astronómico de Zaquencipa, iniciando con un reconocimiento de los espacios que lo conforman.

Se prosigue con una charla introductoria, luego una observación solar con un telescopio especial y finalmente observaciones astronómicas nocturnas bajo la supervisión de personal experto en el tema de Astronomía.

Finalmente se realizará una visita al “Kosmos Museo del Espacio”.

4. Fases de desarrollo

4.1 Preparación previa de las características principales del Sol, la Luna y los planetas.

4.1.1 Objetivo

Preparar a los estudiantes sobre las principales características de los planetas, el Sol, la Luna.

Tiempo: 3 clases de 2 horas cada una - **Grados**: 30 estudiantes de grado décimo y undécimo

4.1.2 Desarrollo de la actividad

- Exposiciones sobre las características del Sol.
- Exposiciones sobre las características de la Luna.
- Exposiciones sobre las características principales de los planetas

4.2 Observación de los cuerpos celestes con telescopios.

4.2.1 Objetivo

Motivar al estudiante al estudio de la Astronomía mediante la observación directa de los cuerpos celestes, planetas, satélites y el astro Sol.

Tiempo: un día y una noche - **Grados**: 30 estudiantes de grado décimo y undécimo - **Invitados**: 15 padres de familia.

4.2.2 Materiales

Instrumentos ópticos

- Telescopio especializado con filtro de hidrógeno para observación del Sol
- Telescopios de medio y alto alcance para observación de la luna, los planetas del sistema solar.

4.2.3 Desarrollo de la actividad

Actividades

Visita diurna

Duración: cuatro (4) horas

- Observación diurna del Sol utilizando telescopio especializado con filtro de hidrógeno.
- Explicación del fenómeno de manchas llamadas solares.
- Visita guiada al museo Kosmos.

Visita Nocturna

Duración: cuatro (4) horas

Actividades

- Charla introductoria a la Astronomía con explicación de los fenómenos celestes.
- Observación nocturna guiada con reconocimiento de las constelaciones, estrellas principales, planetas, nebulosas.
- Observación nocturna con telescopios especializados (se espera el momento adecuado durante la toda la noche, cuando las condiciones atmosféricas lo permita).

5. Ejecución de actividades de la Tercera sesión

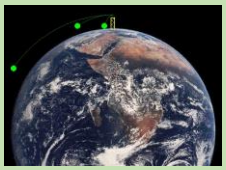
Fotografía 1: Telescopios de media y alto alcance para observación nocturna y diurna.

Fotografía 2: Observación diurna con el telescopio especializado con filtro de hidrógeno.

Fotografía 3: Observación nocturna con telescopio de alto alcance.

D. Anexo: Tercer proyecto de aula

1. Nombre del proyecto



“El satélite de Newton y el movimiento de la Luna”

2. Descripción del tema del proyecto

El proyecto está encaminado a recrear el pensamiento de Newton acerca de la idea que tuvo al disparar un cañón a una altura y a una velocidad que pondría el proyectil en órbita alrededor de la Tierra. Iniciar con el estudio del movimiento parabólico es un importante principio, donde los estudiantes diseñaran y construirán proyectiles de tipo hidráulico-neumático.

Con el fin de ayudar a recrear la imaginación de los estudiantes, se utilizarán simuladores o applets, que lo lleven a imaginar cómo al variar la velocidad del proyectil se puede poner en órbita un cuerpo, como en el caso de la Luna, los satélites artificiales que el hombre ha colocado en órbita.

Todo lo anterior, no se hubiese podido explicar y ser posible sin el descubrimiento de la Ley de la Gravitación Universal.

3. Justificación

Es muy importante que el estudiante de educación media establezca hipótesis a partir de las ideas que tuvo Isaac Newton al formular su famosa Ley de la Gravitación Universal y sus otras tres leyes: de Inercia, la ley del movimiento y la ley de la acción y reacción.

Con este proyecto se le da al estudiante la oportunidad de sacar sus propias conclusiones acerca de la trayectoria que describen los cuerpos, al ser disparados con diferentes ángulos y realizar el cálculo de algunas variables como la velocidad, la altura, y el tiempo que dura en el aire. Conociendo el alcance horizontal máximo y el ángulo de tiro, es posible calcular otras variables utilizando las ecuaciones que rigen el movimiento parabólico.

4. Objetivos

4.1 Objetivo general

Realizar simulaciones del denominado “Cañón de Newton” y mediante prácticas de tiro parabólico establecer su relación con el movimiento de la Luna y la velocidad de escape de un satélite.

4.2 Objetivos específicos

- ✓ Realizar prácticas de tiro parabólico utilizando proyectiles hidráulico- neumáticos y de combustible.
- ✓ Realizar cálculos que le permitan deducir la velocidad y la altura a la que puede ascender un proyectil cambiando su ángulo de tiro.
- ✓ Simular situaciones de tiro parabólico y el “cañón de Newton” mediante applets virtuales.
- ✓ Proponer situaciones en las cuales conduzcan al cálculo de la velocidad de escape.

5. Metodología

El proyecto se realiza en tres etapas o sesiones:

Una primera sesión consiste en una exposición a un grupo de estudiantes de grado décimo sobre el tema del movimiento parabólico y su relación con satélite de Newton, empezando con una lectura motivadora sobre los viajes realizados a la Luna.

Los estudiantes tendrán la oportunidad de realizar exposiciones y realizar prácticas sobre tiro parabólico, en primer lugar utilizarán animaciones interactivas (applets interactivos) sobre el lanzamiento de proyectiles y luego realizarán prácticas de campo utilizando cañones de alcohol y proyectiles hidráulicos.

En una segunda sesión el tema es el “cañón de Newton, para lo anterior, el docente contará con la colaboración de algunos estudiantes, los cuales expondrán el tema a sus compañeros, iniciando con una lectura motivadora sobre uno de los viajes a la Luna; luego continúan con ejemplos explicativos y otros que simulan el denominado “Cañón de Newton” utilizando un simulador virtual.

En una tercera sesión se aborda el tema de velocidad de escape, la deducción de su ecuación a partir de la Ley de la conservación de la energía y solución de problemas relacionados con el tema relacionándolos con el movimiento de la Luna y los satélites artificiales.

6. Fases de desarrollo

PRIMERA SESIÓN

6.1 Exposición y lectura motivadora sobre los viajes a la Luna

6.1.1 Objetivo

Motivar al estudiante al tema de los viajes espaciales realizados a la Luna y su relación con la caída de los cuerpos, el famoso satélite denominado "Cañón de Newton" y la explicación de por qué la Luna no cae a la Tierra.

Tiempo: 15 minutos - **Grados**: 30 estudiantes de grado décimo.

Motivación

Durante la travesía realizada por el Apolo 11 que coloco a los primeros hombres en la Luna, el comandante Neil Armstrong, el piloto del módulo de descenso Edwin F. Aldrin que descendieron a la Superficie lunar y un tercer astronauta el piloto del módulo Michael Collins, que permaneció en órbita lunar cuya misión duró ocho días (del 16 al 24 de julio de 1969).

Tuvieron que pasar trescientos años después del descubrimiento de la Ley de Fuerza Gravitacional por Sir Isaac Newton para que el hombre se liberara de las cadenas de la gravedad y escapar de la Tierra, dos años más tarde el astronauta David Scott en la misión Apolo 15 el 30 de julio de 1971, dejó caer un martillo y una pluma de Halcón comprobando la teoría de Galileo sobre la caída de los cuerpos en un campo gravitatorio.

https://www.youtube.com/watch?v=4mTsrRZEMwA

Video de dominio público: https://www.hq.nasa.gov/alsj/a15/video15.html. "The Hammer and the Feather (El Martillo y la Pluma) publicado el 19 de abril del 2014.

Se concluyó que la fuerza de la gravedad en la Luna es menor que la de la Tierra, en la Luna las cosas pesan menos, caen más despacio, incluso la pluma y el martillo caen iguales. Newton además se preocupaba por la caída de los cuerpos buscaba algo más y era que si las manzanas caen a la Tierra por qué no cae la Luna.

Newton imaginaba que si podía disparar un cañón desde la superficie alta de la Tierra, concluyo que el recorrido de la bola de cañón depende de su velocidad; si la bola de cañón sale a 9,14 metros por segundo, esto quiere decir que recorre 9,14 m antes de llegar al suelo un segundo después.

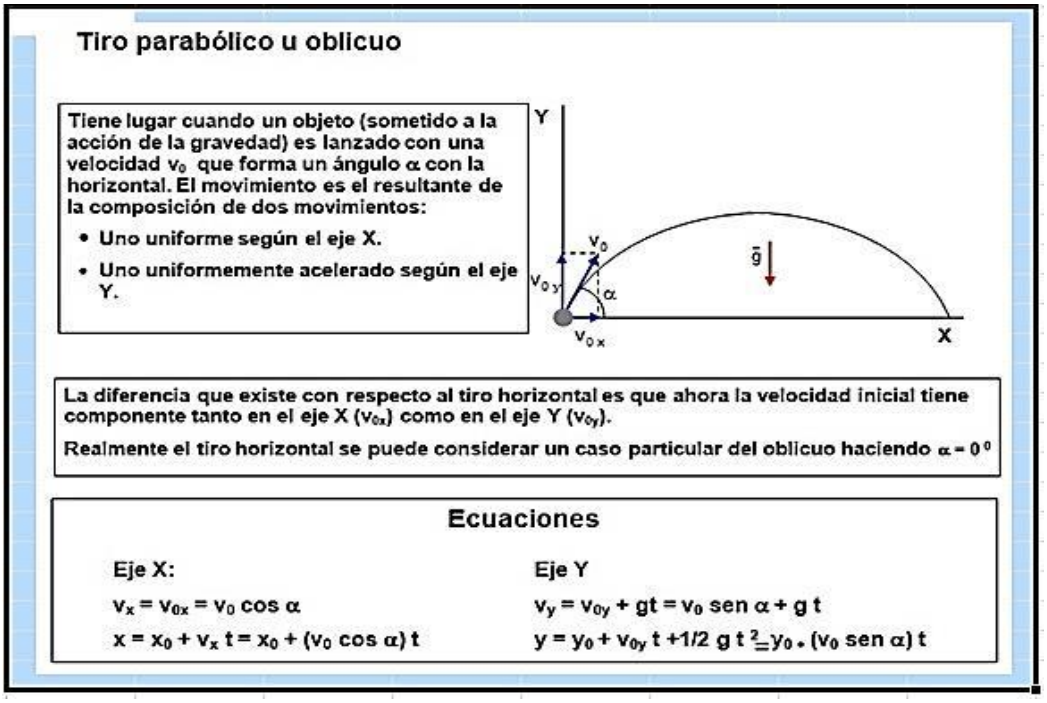
Pero Newton se dio cuenta que si el proyectil se dispara lo más rápido posible, tardará más de un segundo en llegar al suelo, y la superficie de la Tierra se va curvando por debajo de la bola del cañón, dicho de otro modo el proyectil se mantendría en órbita.

Te has preguntado ¿qué velocidad se necesita para sacar un cohete fuera de la órbita terrestre? ¿Qué es la velocidad de escape? ¿Cómo se deduce la velocidad de escape?

6.2 Exposición sobre tiro parabólico

6.2.1 Objetivo

Explicar los principios del tiro parabólico con el propósito de adentrar al estudiante al pensamiento de Newton, con la idea de cómo es posible liberar los cuerpos de la fuerza gravitacional de la Tierra y que logren orbitar alrededor de ella.



Donde Vo es la velocidad inicial con que sale el objeto (proyectil) y tiene dos componentes: Vx que es la componente de la velocidad en el eje x, Vy es la componente de la velocidad en el eje Y, g es la intensidad del campo gravitacional que se toma para los cálculos como 9,8 m/s^2, x es el alcance horizontal del proyectil, y es la altura máxima que alcanza el proyectil.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1.

Un deportista de salto largo se impulsa con una velocidad de 9 m/s llegando a la tabla de batida. Si el ángulo de vuelo es de 38°. Determinar

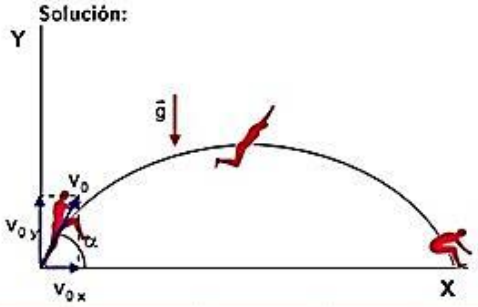
a) Las ecuaciones del movimiento.

b) El alcance horizontal del salto (X_{max}).

c) La altura máxima alcanzada (Y_{max})

d) Altura y velocidad a los 0,8 s.

Solución:



a) Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$v_{0x} = 9$ m/s. Cos 38° = 7,09 m/s

$v_{0y} = 9$ m/s. Sen 38° = 5,54 m/s

$g = -9{,}8$ m/s²

Ecuaciones	
Eje X:	Eje Y:
$V_x = v_{0x} = 7{,}09$	$V_y = 5{,}54 - 9{,}8\,t$
$x = 7{,}09\,t$	$y = 5{,}54\,t - 4{,}9\,t^2$

b) Para calcular el alcance horizontal del salto, se debe suponer que el saltador llegue al suelo.

Es decir y = 0:

$0 = 5{,}54\,t - 4.9\,t^2$; resolviendo la ecuación cuadrática t = 5.54 /4.9 = 1.13 s, que corresponde al tiempo que el saltador está en el aire.

Para calcular la distancia se calcula el valor de la componente x para t = 1,13 s

$X_{max(t=1.13\,s)} = (7.09\ m/s)\,(1.13\ s) = 8.01\ m$

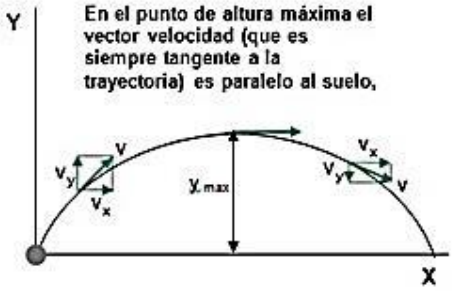
c) En el punto de altura máxima ocurre que la componente y de la velocidad (v_y) es nula (ver esquema). Por tanto:

$v_y = 0.$

$0 = 5{,}5 - 9.8\,t;$

$t = 0{,}565$ s.

El tiempo obtenido es el que tarda en alcanzar la altura máxima (notar que en este caso es justamente la mitad del tiempo de vuelo, pero no siempre ocurre esto.



En el punto de altura máxima el vector velocidad (que es siempre tangente a la trayectoria) es paralelo al suelo,

Para calcular el valor de la altura máxima, calculamos el valor de la componente y para t = 0,565 s:

$y_{(t=0.565\,s)} = (5{,}54\ m/s)(0{,}565\ s) - (9.8\ m/s^2)(0.565\ s)^2/2 = 1{,}56$ m.

d) A los 0,8 s de iniciado el salto el alcance horizontal del atleta será:

$$x_{(t=0,8\,s)} = (7.09\ m/s)(0.8\ s) = 5{,}672\ m.$$

A una altura de:

$$y_{(t=0,8\,s)} = (5{,}54\ m/s)(0{,}8\ s) - (9.8\ m/s^2)(0.8\ s)^2./2 = 1.296\ m$$

Las componentes de la velocidad valdrán:

$v_x = 7.09\ m/s.$

$v_y = 5{,}54\ m/s - (9.8\ m/s^2)(0.8\ s) = 2.3\ m/s$

Como se puede comprobar por el signo de v_y el saltador se encuentra en la parte descendente de la parábola. Su velocidad final será:

$$v = \sqrt{v_x^2 - v_y^2}\ , \quad v = \sqrt{(7.09^2) - (2.3^2)} = 7.45\ m/s$$

Ejemplo 2.

Desde una azotea de un edificio situada a 12 m del suelo se lanza una pelota con una velocidad de 15 m/s formando un ángulo de 30º con la horizontal. Determinar:

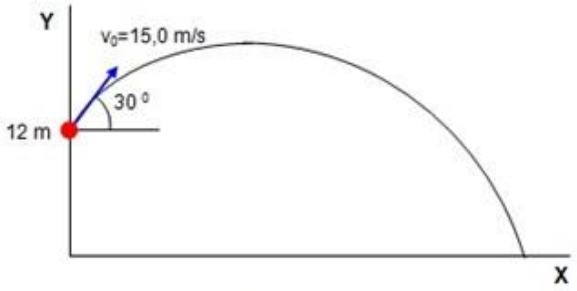
a) Las ecuaciones que describen el movimiento de la pelota si se toma como origen el de coordenadas

b) ¿Cuánto tiempo tardará en chocar con el suelo?

c) ¿Cuál es el alcance horizontal máximo?

d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

Solución



Tomado como origen el de los ejes coordenados y considerando positivo hacia la derecha y hacia arriba:

$x_0 = 0$
$y_0 = 12$
$v_{0x} = 15{,}0 \cdot \cos 30 = 13{,}0\ m/s$
$v_{0y} = 15{,}0\ \text{sen}\ 30 = 7{,}5\ m/s$
$g = -10\ m/s^2$

Ecuaciones

Eje X:	Eje Y:
$v_x = v_{0x} = 13{,}0$	$v_y = 7{,}5 - 10\,t$
$x = 13{,}0\,t$	$y = 12 + 7{,}5\,t - 5\,t^2$

Para calcular el tiempo considerando el origen situado en el suelo, cuando la pelota choca con éste.

$y = 0$

$0 = 12 + 7{,}5\,t - 5\,t^2$; resolviendo la ecuación de segundo grado y seleccionando el resultado positivo que es el que tiene significado físico. La pelota tarda en caer: $t = 2{,}47$ s.

Para calcular la altura máxima calculamos el valor de y:

$y_{(t = 0{,}75\ s)} = 12 + (7.5\ m/s)\,(0.75\ s) - (10\ m/s^2)(0.75\ s)^2./\,2 = 14.81\ m$

6.3 Simuladores applets de tiro parabólico

6.3.1 Objetivo

Recrear el tiro parabólico mediante la simulación, utilizando applets de aplicación.

Tiempo: 60 minutos - **Grados**: 30 estudiantes de grado décimo y undécimo.

Procedimiento

- Utilizar el applets de simulación de tiro parabólico el cual se encuentra en el siguiente link:

http://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/projectile-motion

El simulador de tiro parabólico de libre utilización fue tomado de la página de internet PhET Interactive Simulation, derechos reservados a la Universidad de Colorado.

- Se llenan los campos de clase de proyectil, el ángulo de tiro en grados, la velocidad inicial en m/s, la masa en Kilogramos (Kg), el diámetro de la masa en metros (m), resistencia del aire opcional, así como el sonido del disparo**.**

- En su cuaderno el estudiante debe calcular el tiempo de subida, el tiempo de vuelo, el alcance máximo horizontal y la altura máxima antes de ser disparado el proyectil del simulador (opción fuego).

- Después de tener los datos anteriores, el estudiante debe colocar el blanco en su posición y accionar la opción fuego y debe observar si los datos calculados son iguales a los arrojados por el programa.

- Cambiar las opciones y repetir nuevamente el procedimiento anterior.

- Recolecte los datos de los compañeros que participan en la práctica en una tabla, donde especifique:

N°	Masa (m)	Diámetro (Φ)	Ángulo de Tiro (θ)	Velocidad Inicial (Vo)	Tiempo de subida (t_s)	Tiempo de vuelo (t_v)	Alcance horizontal (X_{max})	Altura máxima (Y_{max})
-	(Kg)	(m)	(grados)	(m/s)	(s)	(s)	(m)	(m)
1								
2								

Tabla 1. Datos recogidos de la simulación de tiro parabólico.

Autoevaluación

Reúnase en grupos de dos estudiantes y conteste las siguientes preguntas.

1. ¿Qué ecuaciones utilizo para el cálculo de los resultados?
2. ¿Concuerdan los resultados calculados con los arrojados en el programa virtual?
3. ¿Influye la masa en los resultados obtenidos?
4. ¿Qué observo al cambiar el ángulo de tiro?
5. ¿Si le diera una velocidad lo suficientemente grande podría pensar que saldría de la Tierra?
6. ¿Si ese proyectil lograra salir de la Tierra estaría venciendo la fuerza de la gravedad?
7. ¿Qué trayectoria seguiría el proyectil al salir de la Tierra?
8. ¿Qué conclusiones podrías deducir de esta actividad?

6.4 Practica de tiro parabólico

6.4.1 Objetivo

Realizar prácticas de tiro parabólico con el fin de determinar la altura máxima que alcanza un proyectil disparado a diferentes ángulos de inclinación.

Tiempo: 2 clases de 60 minutos cada una - **Grados**: 30 estudiantes de grado décimo y undécimo.

Materiales:

- Cañones de PVC de 2,5 Pulgadas de diámetro y de diferentes longitudes
- Alcohol etílico
- Jeringa de 3 centímetros cúbicos
- Base de apoyo
- Transportador y regla de madera
- Decámetro
- Cinta de seguridad
- Cañones hidráulicos con botellas de agua y compresor de aire.

Procedimiento

- Preparar la zona de tiro utilizando cinta de seguridad.
- Colocar el cañón con un ángulo determinado.
- Disparar el cañón, repitiendo tres la experiencia con el mismo ángulo.
- Medir el alcance horizontal.
- Recolectar los datos promedios en la misma tabla utilizada para realizar simulaciones virtuales.
- Realizar cálculos del tiempo de subida, el tiempo de vuelo, la altura máxima alcanzada por el proyectil a partir del ángulo de tiro y el alcance máximo horizontal.
- Repita la experiencia cambiando el ángulo de tiro.
- Realice las experiencias utilizando proyectiles hidráulicos.

Autoevaluación

1. ¿Qué ecuaciones utilizo para el cálculo de los resultados?
2. ¿Qué observo al cambiar el ángulo de tiro?
3. ¿Qué dificultades se presentaron durante la práctica?
4. Realiza una comparación entre la actividad con simuladores virtuales y esta práctica de campo.
5. Realice comentarios utilizando los proyectiles hidráulicos con botellas de agua.

SEGUNDA SESIÓN

6.5 El “cañón de Newton”

6.5.1 Objetivo

Recrear el pensamiento de Newton mediante un simulador virtual del “cañón de Newton

Tiempo: 50 minutos - **Grados**: 30 estudiantes de grado décimo y undécimo.

6.5.2 Exposición sobre el cañón de Newton

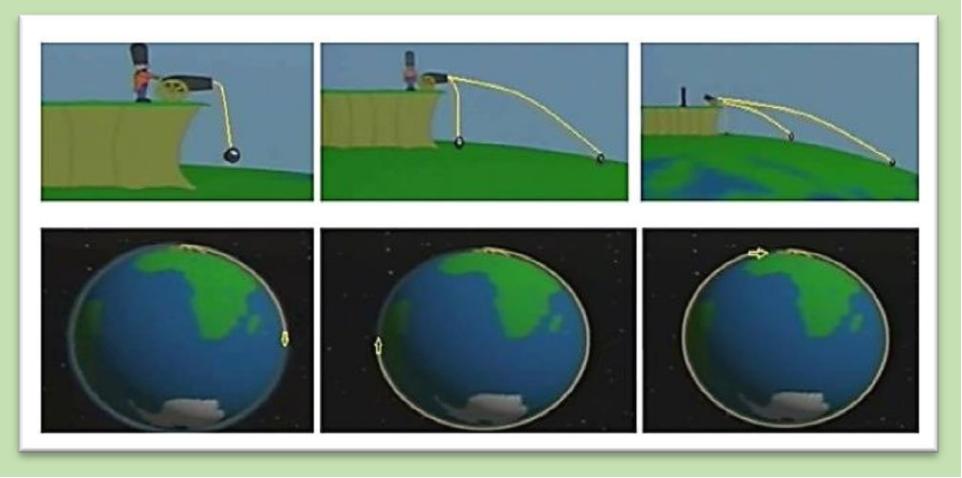


Figura 1: Trayectoria del proyectil imaginado por Newton disparado a gran velocidad.

Newton sabía que la Luna a igual que la bola del cañón se mantendría cayendo en órbita alrededor de la Tierra por toda la eternidad debida a la aceleración de la Luna.

Materiales

- Utilizar los applets de simulación del "cañón de Newton" los cuales se encuentra en los siguientes links con permiso de uso educativo:

http://educativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/3000/3227/html/24_velocidad_de_escape.html

El siguiente link es tomado de la página de la Nasa official de Space Place

http://spaceplace.nasa.gov/how-orbits-work/sp/

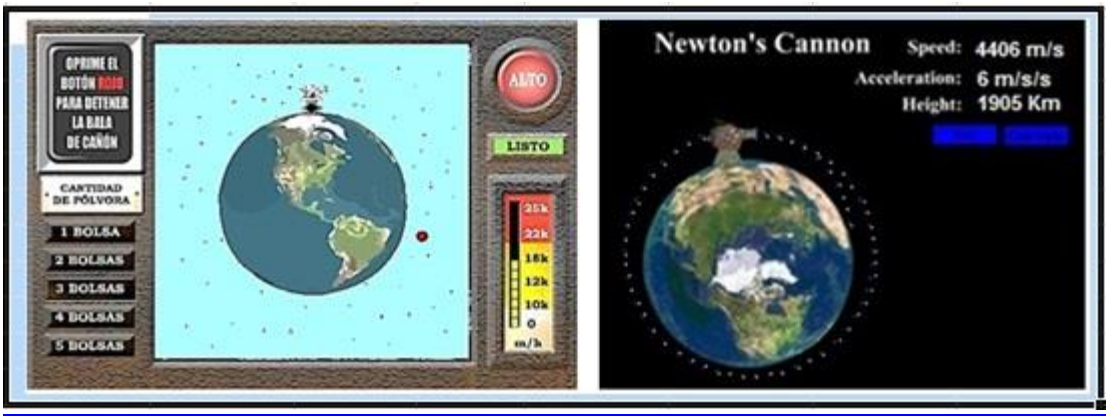


Figura 2: Simuladores virtuales del "cañón de Newton".

Procedimiento

- Varíe la velocidad inicial de lanzamiento (mayores de o iguales a 500 m/s) y presione el botón de lanzamiento y comprueba las distintas trayectorias del proyectil.
- Toma las anotaciones de las velocidades y contesta las siguientes preguntas:

Preguntas:

Forma grupos de dos estudiantes y contesten las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Qué observa cuando utiliza velocidades pequeñas?
- ✓ ¿Qué observa para las velocidades muy grandes?
- ✓ ¿Por qué el cuerpo después de salir a gran velocidad sigue orbitando alrededor de la Tierra?
- ✓ Utiliza el cañón de sacos de pólvora y prueba con varios sacos.
- ✓ ¿Qué sucedería si usamos más de dos sacos?
- ✓ ¿Sucede lo mismo cuando se pone en órbita un transbordador o un satélite?
- ✓ ¿Qué quiso explicar Newton con este experimento al comparar la bala de un cañón con la Luna?

TERCERA SESIÓN

6.6 Velocidad de escape

6.6.1 Objetivo

Determinar la velocidad mínima para que un cuerpo salga de la Tierra y siga orbitando a su alrededor.

Tiempo: 50 minutos - **Grados**: 30 estudiantes de grado décimo y undécimo.

6.6.2 Exposición sobre la velocidad de escape

Lo que debes saber

Lo más importante es que la velocidad de escape es la velocidad que debe imprimírsele a un cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria del planeta. Su valor es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R}}$$

Donde el v_e es la velocidad de escape, G es la constante de gravitación universal, M_T es la masa del planeta, en este caso el de la Tierra y R es el radio del planeta.

Se puede observar que la velocidad de escape es independiente de la masa del cuerpo (satélite) lanzado y sólo depende de la masa del planeta y del radio del mismo.

Los satélites en realidad están cayendo hacía la Tierra, del mismo modo que la manzana de Isaac Newton, la diferencia esencial es que los satélites se mueven a gran velocidad; a unos 30.000 km/h, y a mucha más altitud. Esto significa, tal como se estudió en la sesión del cañón de Newton, que a medida que el satélite va cayendo hacía la Tierra, la superficie de nuestro planeta se curva y se aleja al mismo tiempo de él, por lo tanto nunca va a tocar la superficie de la Tierra, tal como supuso Isaac Newton.

Procedimiento

- Realiza grupos de trabajo de dos estudiantes
- Responder los siguientes problemas:

Imagen 22. NASA Dominio público

1.Calcula la velocidad de escape de un cuerpo de 2000 Kg de masa que se lanza desde la superficie terrestre.

Tomar en cuenta los siguientes datos:
$M_T = 5,98 \times 10^{24}$ Kg, $G = 6,67 \times 10^{-11}$, $R_T = 6,37 \times 10^{6}$ m

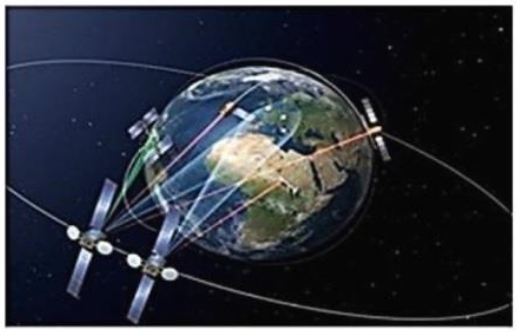


Imagen tomada de Astroseti.org. Dominio público

2.Se desea lanzar dos sondas espaciales fuera del alcance gravitatorio de la Tierra. La primera tiene una masa de 1000 Kg y la segunda de 2500 Kg. ¿Cuál de ellas tendrá que ser lanzada con una velocidad inicial mayor?

a. La de 1000 Kg
b. La de 2500 Kg
c. Ambas tienen igual velocidad inicial de lanzamiento

Imagen 24. NASA Dominio público

3. Calcular la velocidad de escape de un objeto lanzado de la superficie de Júpiter.

Dados los siguientes datos:

$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$, $R_{Júpiter} = 71,4 \times 10^{6}$ m,

$M_{Júpiter} = 1,9 \times 10^{27}$ Kg

7. Cronograma de actividades

Actividad	Fecha	Objetivo	Responsables
1. Dar a conocer al estudiante el proyecto y sensibilizarlo acerca de su importancia	Septiembre 10 de 2015	Sensibilizar a los estudiantes acerca del proyecto, explicándoles cada una de las sesiones.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
Primera Sesión: Exposiciones de ambientación y simulación del tiro parabólico			
2. Ambientación y motivación mediante lectura sobre el viaje a la Luna realizada por el Apolo 11 y el video del episodio de la caída del martillo y la pluma.	Septiembre 22 de 2015	Motivar a los estudiantes sobre los viajes a la Luna y el pensamiento de Newton en cuanto al tema del "cañón de Newton"	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
3. Exposiciones acerca del tema de tiro parabólico.	Septiembre 25 y 29 de 2015.	Explicar el concepto de tiro parabólico y las ecuaciones que rigen este movimiento. Resolver situaciones problemas relacionados con el cálculo de la altura, la velocidad y el tiempo de vuelo conociendo el ángulo de tiro y el alcance horizontal.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Monitores de grado Undécimo y alumnos de décimo de la jornada tarde.
4. Simulaciones de tiro parabólico utilizando applets de aplicación.	Septiembre 29 de 2015.	Simular situaciones de tiro parabólico utilizando applets aplicativos, para calcular el tiempo de vuelo, el alcance horizontal y la altura máxima antes de ser disparado el proyectil.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
Segunda sesión: Exposición y ambientación del "cañón de Newton"			
5. Exposiciones acerca del "cañón de Newton".	Octubre 6 de 2015	Conocer el pensamiento de Newton a partir de la interpretación del "cañón de Newton". Y su relación con el movimiento de la Luna.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
6. Simulaciones del cañón de Newton utilizando applets de aplicación.	Octubre 9 de 2015.	Simular situaciones del cañón de Newton utilizando applets de aplicativos.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
Segunda sesión: Exposición y ambientación del "cañón de Newton"			
7. Diseño de proyectiles hidráulicos	Octubre 13 al 16 de 2015.	Diseñar proyectiles hidráulicos-mecánicos para realizar pruebas de tiro parabólico.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la

y cañones de alcohol.			jornada tarde
8. Práctica de tiro parabólico.	Octubre 20 de 2015.	Realizar prácticas de tiro parabólico para calcular la velocidad de disparo y la altura máxima.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.
9. Socialización de la práctica de tiro parabólico y su relación con el cañón de Newton	Octubre 22 de 2015.	Socializar las prácticas de tiro parabólico y cuál es su relación con el cañón de Newton.	Docente: Eduardo Santos Estudiantes: Grados undécimo y décimo de la jornada tarde.

8. EJECUCIÓN DE ACTIVIDADES

8.1 Actividades de la primera sesión de tiro parabólico

Fotografía 1: Simulador virtual de tiro parabólico

Fotografía 2: Exposición de tiro parabólico

Fotografía 3: Presentación de la práctica de tiro parabólico

Fotografía 4: Ejecución de la práctica de tiro parabólico

Fotografía 5: Ejecución de la práctica de tiro parabólico con proyectiles hidráulicos

Fotografía 6: Trayectoria de la botella con proyectiles hidráulicos.

8.2 Actividades de la segunda sesión sobre el "cañón de Newton

Fotografía 7: Exposición sobre el "cañón de Newton"

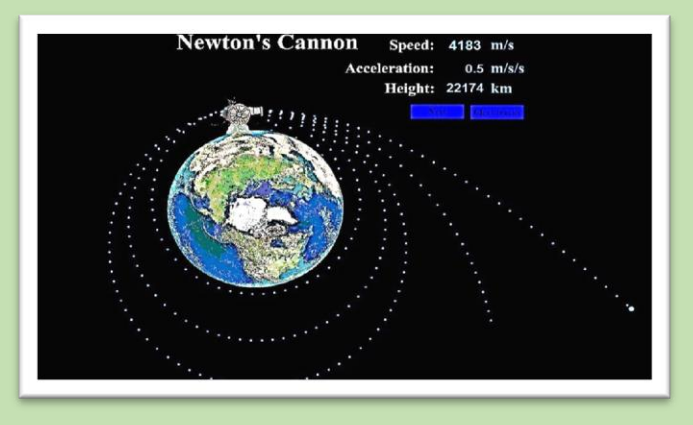


Figura 8: Trayectorias obtenidas por los estudiantes con el simulador “cañón de Newton”

8.3 Actividades de la segunda sesión sobre el la velocidad de escape

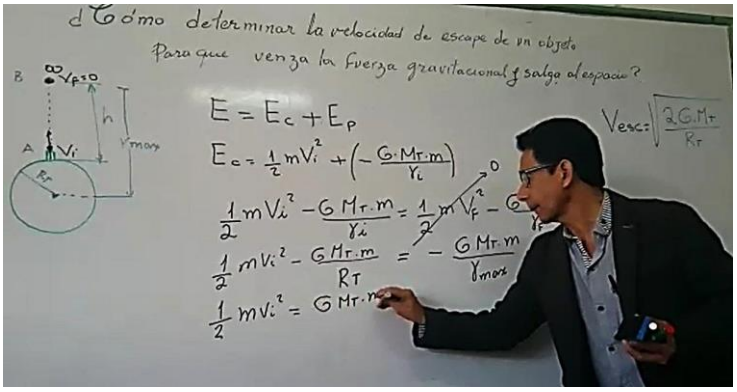


Figura 9: Exposición de la velocidad de escape.

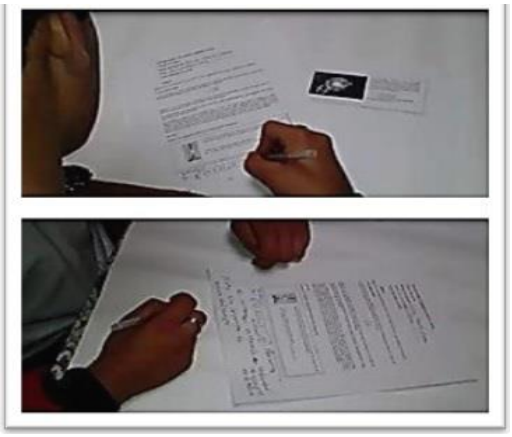


Figura 10: Autoevaluación de la velocidad de escape.

E. Anexo: Videos de la práctica Pedagógica

1. Video sobre sensibilización a las secciones cónicas realizado por el docente. Ver en el link:

https://youtu.be/ZviTuE9aQ-o

2. Video sobre las características principales de los planetas. Ver en el link:

https://youtu.be/FxVqWrZRlvk

3. Video sobre la fuerza gravitacional y el movimiento de los planetas. Ver en el link:

https://youtu.be/ZIIvgIWze3A

4. Video sobre la velocidad de escape y el cañón de Newton. Ver en el link:

https://www.youtube.com/watch?v=3o0gjpMskkU

5. Video sobre el diseño y montaje de un planetario escolar. Ver en el link:

https://www.youtube.com/watch?v=ltpq-Um5ciw&feature=youtu.be

Bibliografía

Avila, M. (2009). *Mecánica Celeste.* Obtenido de http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_//celeste/kepler4/kepler4.html (Citado el 20 de Junio 2015)

Blank, W. (. (1997). (I. W. Harwell, Ed.) *Promising practices for connecting high school*.

Bottoms, G. &. (1998). *Connecting the curriculum to "real life.".Breaking Ranks: Making it happen. Reston, VA: National Association of.*

Brandmüller, W. a. (1992). *Copernico Galilei e la Chiesa (1820) y gli atti del San't Uffizio.* Editorial Olschki Ed., Firenze.

Bryson, E. (1994). *Will a project approach to learning provide children opportunities to do purposeful reading and writing, as well as provide opportunities for authentic learning in other curriculum areas?*

Challenge, M. 2. (1999). Why do project based learning? *San Mateo, CA: San Mateo County Office of Education. Retrieved June 25,*.

Cohen, I. B. (Mayo de 1981). El descubrimiento newtoniano de la gravitación. . *Revista Investigación y Ciencia.*, Pás. 110-120.

Díaz, B. F. (2006). *Enseñanza situada.Vínculo entre la escuela y la vida.* México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE.C.V.

Dickinson, K. P., Soukamneuth, S., & Yu, H. (1998). Providing Educational Services in the Summer Youth. *Social Policy Research Associates*.

Harwell, S. (1997). Project based learning. (I. W. Harwell, Ed.) *Promising practices for connecting high school to the real world*, 23-28.

Hernández, M. (1996). Fuerza y movimiento. *Revista Española de Física, 10*(2), pp.44-45.

Holton, G. (1989). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias Físicas.* Madrid, España: Editorial Reverté, S.A.

Karttunen, H. P. (2006). *Fundamental Astronomy.* (5th Edition. Springer Berlin Heidelberg New York. ed.).

López, C. R. (2014). *Las Tic en el aula de tecnología. Guía para la aplicación de la metodología por proyectos* (Segunda edición ed.).

Marquina, J. E. (Junio de 2005). La construcción newtoniana de la gravitación universal. *Revista Mexicana de Física, 51*(En1), 45-53.

McKelvey, J. P. (1978). *Física para ciencias e ingeniería.* (Vol. I). México D.F.: Tierra Firme.

Moursund, D. B. (1997). *Foundations for The Road Ahead: Project-based learning and information technologies.* Washington, DC.

Ortiz, L. y. (2003). Desarrollo de estrategias de aprendizaje en Educación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*.

Papp, D., & Babini , J. (1954). *Panorama general de la historia de la ciencia* (Vol. VII). Buenos Aires, Argentina: Editorial Espasa-Calpe.

Reyes, R. (1998). *Native perspective on the school reform movement: A hot topics pape. Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory, Comprehensive Center Region X. Retrieved July 10, 2002, from.*

Sánchez, M. (2014). Campo gravitatorio en 2° Bachillerato.Un tema idóneo para conectar con aspectos de la actualidad científica astronómica y astrofísica. *Revista digital del IES Lonardo Da Vinci de Alicante*.

Serway. Raymond A, J. W. (2004). *Physics for Scientists and Engineers.* Thomson Brooks/Cole, 6th Edition. pág. 389.

Torroja, J. (1961). La gravitación universal y su consecuencias. *Historia de la matemática en los siglos XVII y XVIII, 18*, 75-112.

W.O.Urrego, J. G. (2001). El computador en la enseñanza de la Física: Leyes de Kepler por medio de simuladores. *Revista colombiana de Física, Vol. 33*(N° 2).

Weisstein, E. W. (1999). *"Ellipse." From MathWorld--A Wolfram Web Resource.* Obtenido de http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html (citado el 15 de Junio 2015)