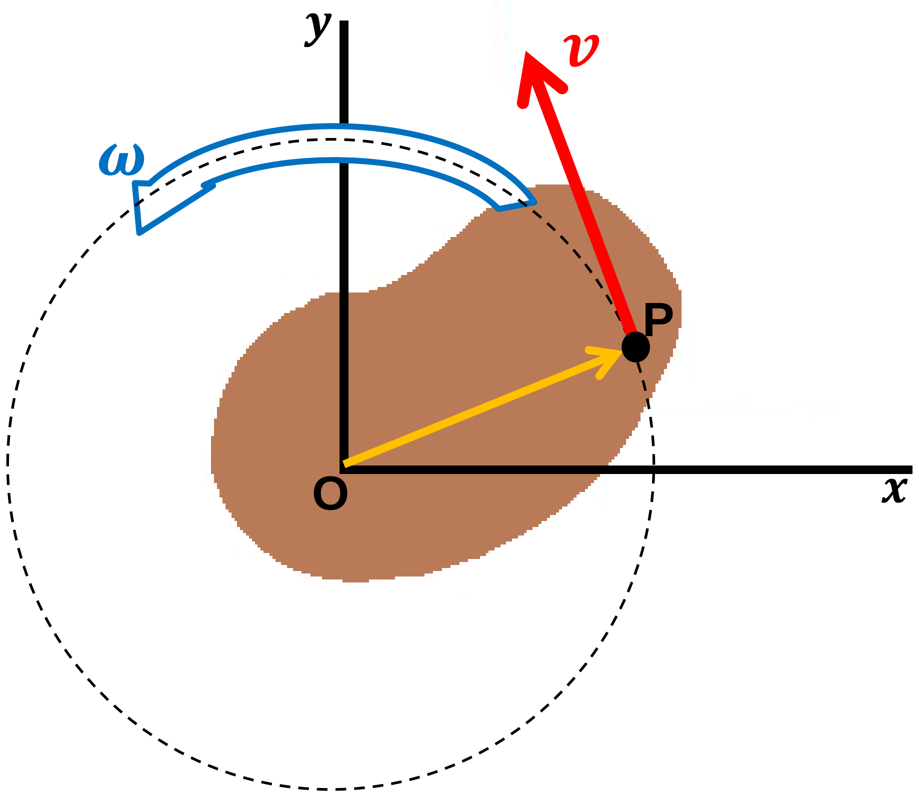
Física:
Torque y Momento de Torsión

Dictado por:
Profesor Aldo Valcarce

2^{do} semestre 2014

Relación entre cantidades angulares y traslacionales.

En un cuerpo que rota alrededor de un origen O, el punto P se mueve en un círculo:



Solo tiene velocidad tangencial

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{r\omega}$$

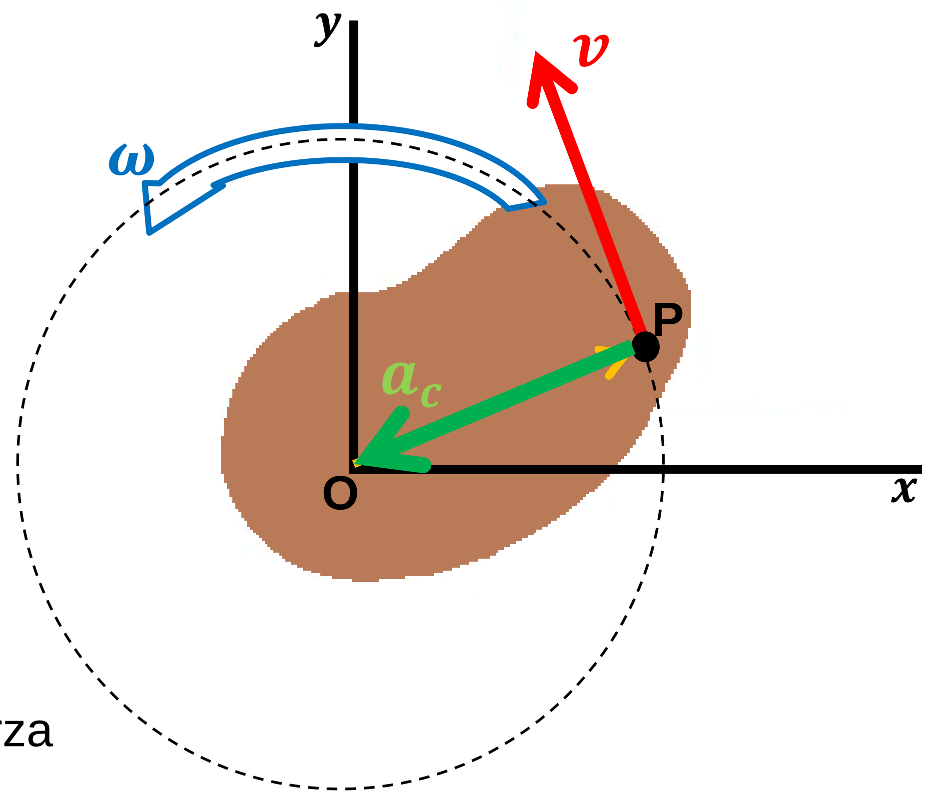
No tiene velocidad en la dirección del origen.

Cada punto del cuerpo tendrá una velocidad tangencial diferente.

Todos los puntos del cuerpo tiene la misma velocidad angular, pero diferente distancia al centro de rotación.

¿El punto P tiene aceleración?

El punto P si tiene aceleración:



Todo cuerpo que se mueve en una trayectoria circular siente una aceleración centrípeta.

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

¿Qué fuerza real está ejerciendo la fuerza centrípeta?

Relación entre cantidades angulares y traslacionales.

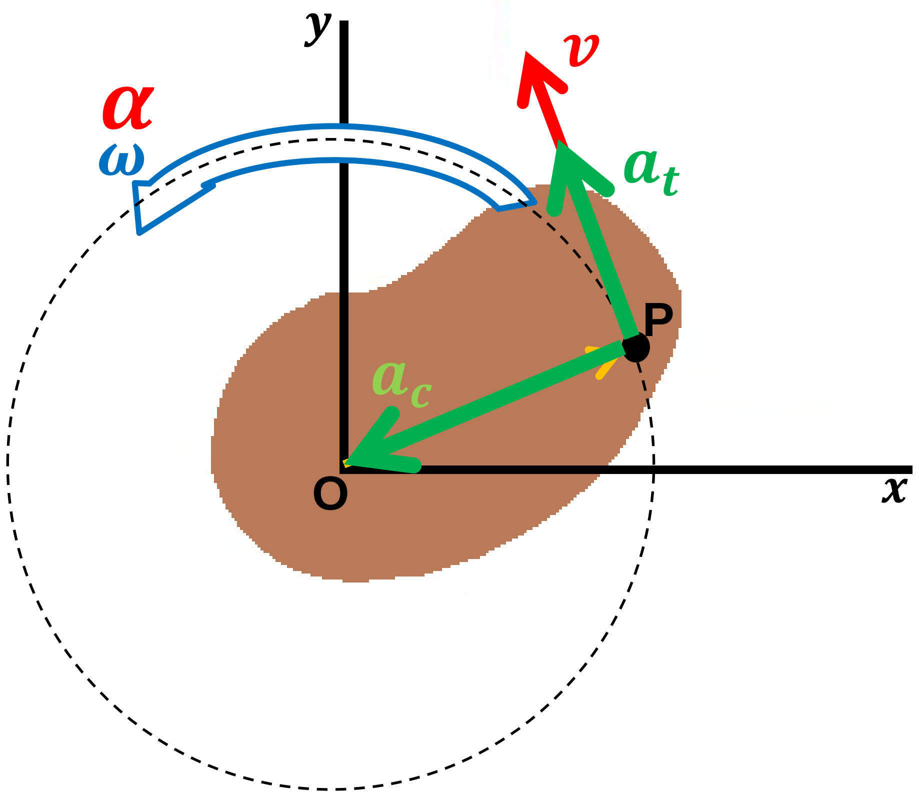
En el caso de que también exista aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, el punto P se mueve en un círculo con:

- Aceleración tangencial

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

- Aceleración centrípeta

$$a_c = r\omega^2$$



¿Cuánto es la aceleración total?

Dado que la aceleración es un vector se suman las componentes tangenciales y radiales:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{a_t}} + \overrightarrow{\boldsymbol{a_r}}$$

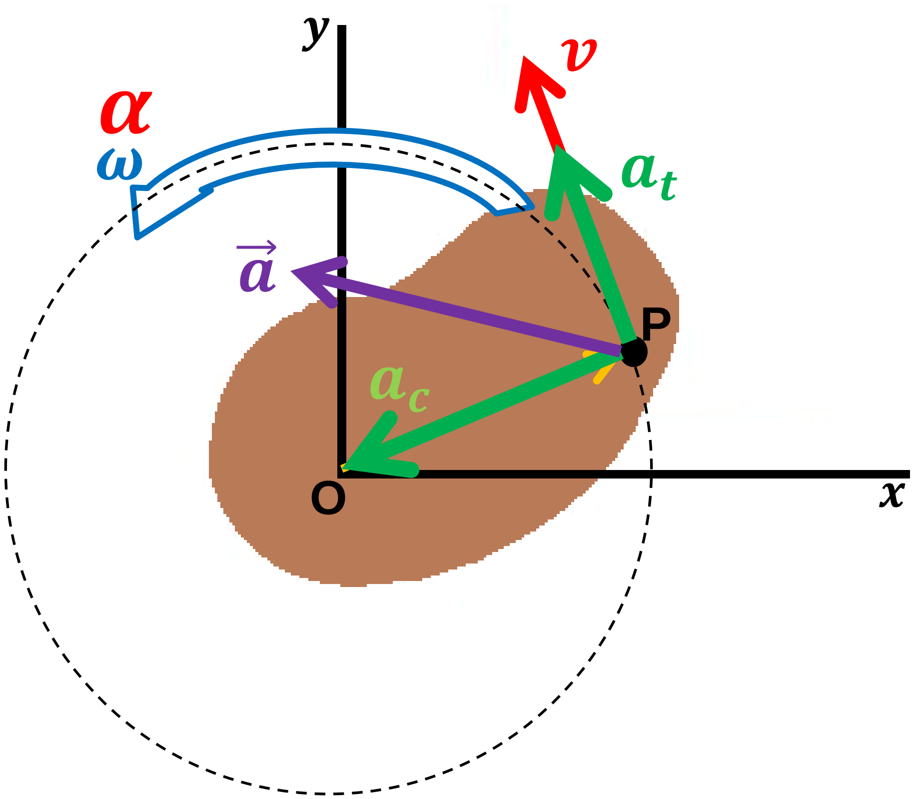
donde $|\overrightarrow{\boldsymbol{a_r}}| = \boldsymbol{a_c}$.

Entonces la magnitud de $\vec{\boldsymbol{a}}$ será:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

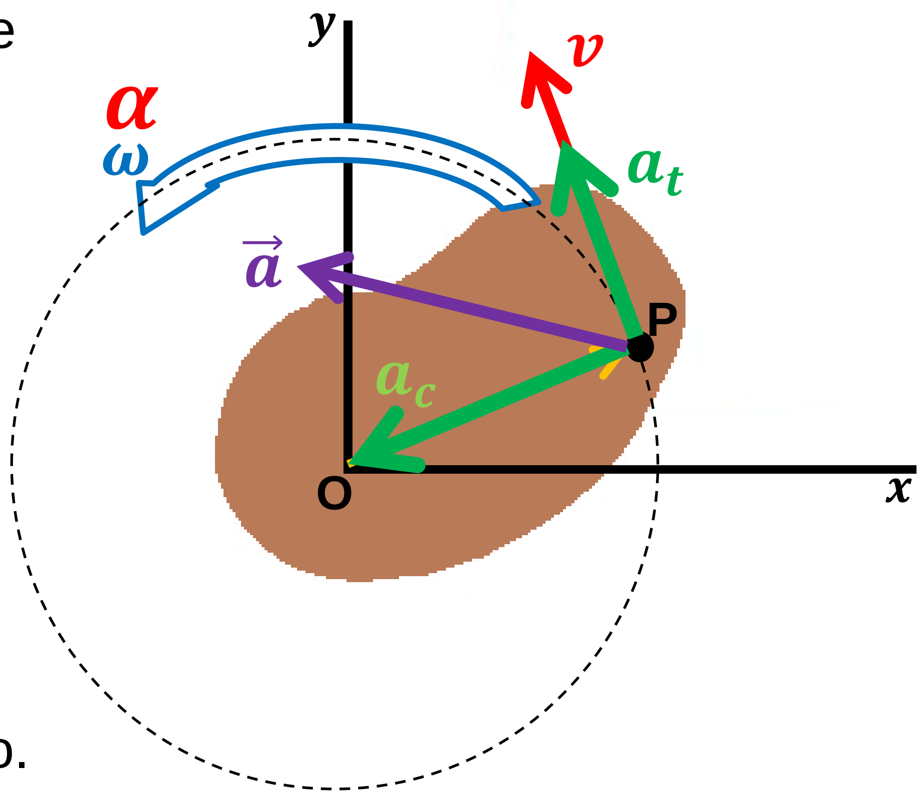
$$= \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4}$$

$$= r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



Ejemplo:

El objeto que se ve en la figura puede girar en torno al eje de rotación O.



Si el objeto comienza a girar con una aceleración angular $\alpha = 5\, rad/s^2$ y punto P se encuentra a 10 cm del origen determine la aceleración total del punto P:

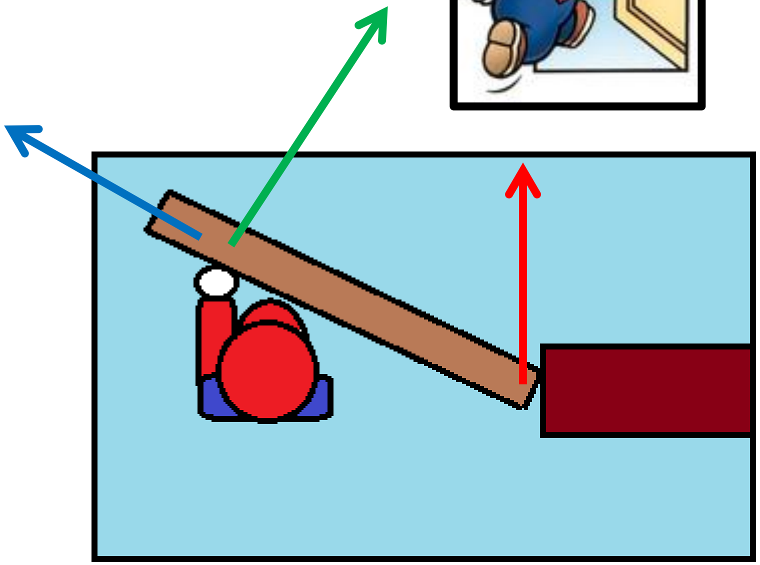
a) Al inicio del movimiento.
b) Después de 2 segundos del inicio.
c) Después de 10 segundos del inicio.

¿Qué fuerza produce una aceleración angular?

Como ya sabemos, todo cuerpo en reposo permanecerá en reposo a menos que se le aplique una fuerza.

Considerando que la puerta rota en torno a las bisagras:

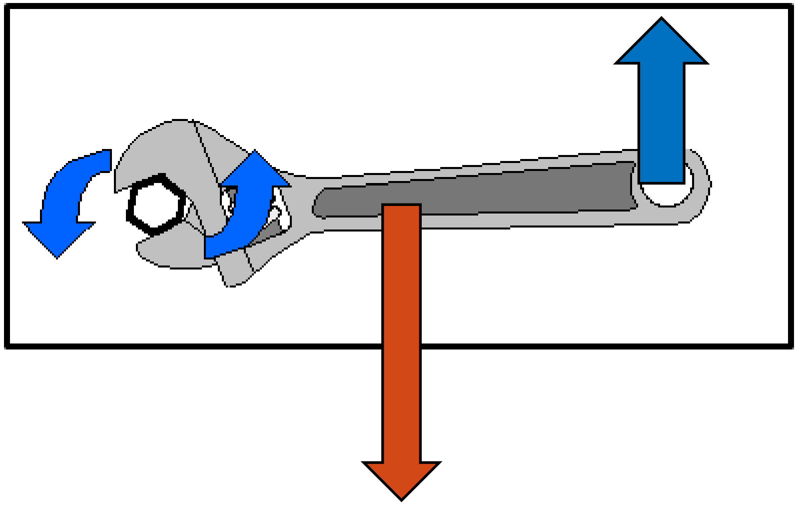
¿Dónde y cómo se debe aplicar una fuerza para abrir la puerta?



¿Qué fuerzas hacen que el objeto tenga una aceleración angular?

Momento de Torsión (Torque)

La capacidad de un fuerza de hacer girar un objeto se define como torque.



Torque: capacidad de giro que tiene una fuerza aplicada sobre un objeto.

¿De que factores depende el torque?

- Distancia al punto de giro: $\boldsymbol{d}$
- Magnitud de la fuerza: $\boldsymbol{F}$
- Ángulo de aplicación de la fuerza: $\boldsymbol{\theta}$

  Si $\boldsymbol{\theta = 90°}$ máximo torque.

  Si $\boldsymbol{\theta = 0°}$ no hay torque.

Momento de Torsión (Torque)

Entonces, el torque $\boldsymbol{\tau}$ será proporcional a:

- la magnitud de la fuerza $\boldsymbol{F}$
- la distancia $\boldsymbol{d}$ entre el punto de aplicación de la fuerza y el punto de giro
- el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ de aplicación de la fuerza.

$$\boldsymbol{\tau = F \times d \times sen\theta}$$

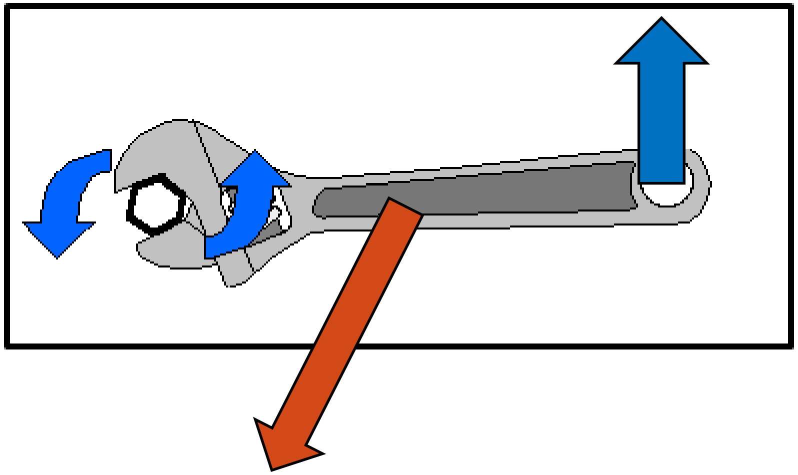
Se usa la convención de que el torque será positivo si el cuerpo gira en sentido anti-horario, mientras que el torque será negativo si el cuerpo gira en sentido horario.

Unidades del torque: Nm (mismas unidades que W, pero significado diferente.)

Torque neto

Sobre un cuerpo puede existir muchos torques actuando al mismo tiempo.

Por ejemplo, si dos fuerzas actúan sobre un mismo objeto ¿en qué sentido gira el objeto?



$$\tau_{neto} = \sum \tau$$

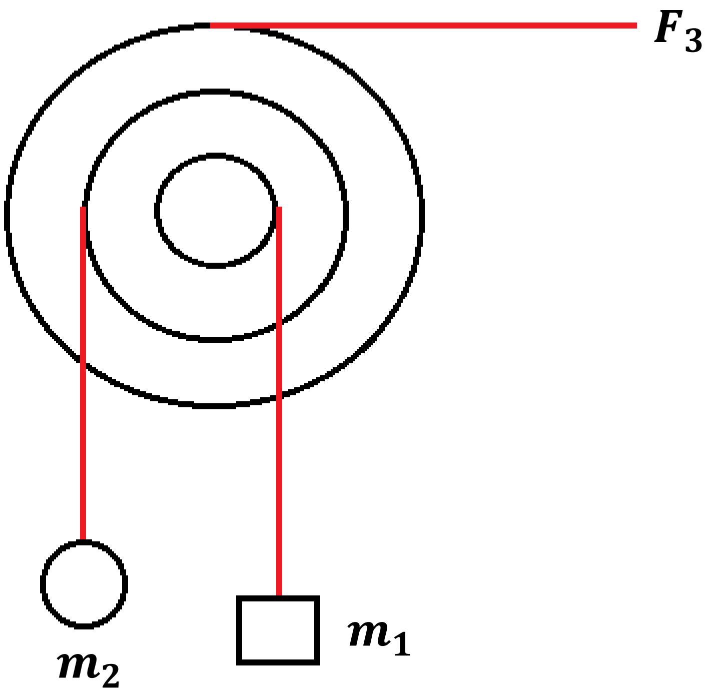
$$= \tau_1 + \tau_2$$

$$\tau_{neto} = +F_1 d_1 sen\theta_1 - F_2 d_2 sen\theta_2$$

Ejemplo: Torque neto

Un sistema de un triple cilindro concéntrico con radios $R_1 = 5\ cm$, $R_2 = 8\ cm$ y $R_3 = 18\ cm$ soporta dos masas $m_1 = 10\ kg$ y $m_2 = 3\ kg$, las cuales ejercen torque sobre el sistema.

Determine el valor de la fuerza $\boldsymbol{F_3}$ de tal manera que el sistema se encuentre en equilibrio.



¿Cómo obtener la aceleración angular al aplicar un torque?

Sabemos de la segunda ley de Newton que:

Una fuerza neta sobre un objeto ocasiona una aceleración sobre él, la cual es inversamente proporcional a la masa.

En el movimiento rotacional existe un análogo a la segunda ley de Newton:

Un torque neto sobre un objeto que tiene un punto de rotación fijo ocasiona una aceleración angular sobre él, la cual es inversamente proporcional a cierta cantidad ***I***.

τ y α en una partícula aislada

Una partícula que gira en torno a un centro debido a la acción de fuerzas tangenciales tiene una aceleración tangencial dada por:

$$\sum F_t = m\, a_t$$

Multiplicando por la distancia al centro de rotación:

$$\sum \tau = \sum F_t\, r = m\, a_t\, r \;= m\,(r\,\alpha)r \;\; = m\, r^2\, \alpha$$

Llamando a $m\, r^2 = I$ se tiene que

$$\sum \tau = I\, \alpha$$

τ y α en un conjunto de partículas

Un conjunto de partículas unidas entre si pueden sentir diferentes fuerzas por separado:

$$\boldsymbol{F_i = m_i\, a_i}$$

Por lo cual si están rotando en torno el mismo eje, cada una sentirá un torque dado por:

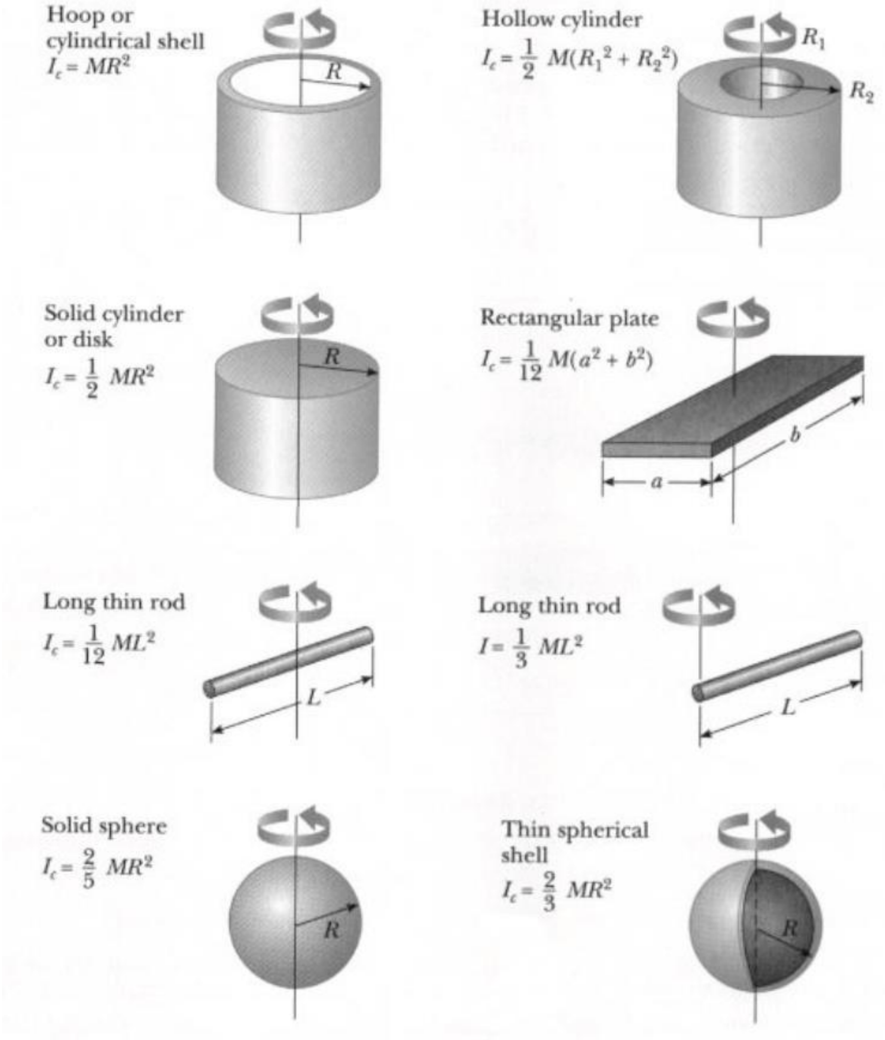
$$\boldsymbol{\tau_i = r_i\, F_i = m_i\, r_i\, a_i = m_i\, r_i^2 \alpha}$$

Si estas partículas no pueden separarse (pertenecen a un cuerpo rígido) el torque neto que sentirá el cuerpo será:

$$\sum \boldsymbol{\tau_i} = \sum(\boldsymbol{m_i\, r_i^2 \alpha}) = \left(\sum \boldsymbol{m_i\, r_i^2}\right) \boldsymbol{\alpha} \;\Rightarrow\; \sum \boldsymbol{\tau = I\, \alpha}$$

En consecuencia el momento de inercia $I = \sum \boldsymbol{m_i\, r_i^2}$ debe jugar el mismo rol en el movimiento rotacional que la masa en el movimiento traslacional.

Algunos momentos de Inercias

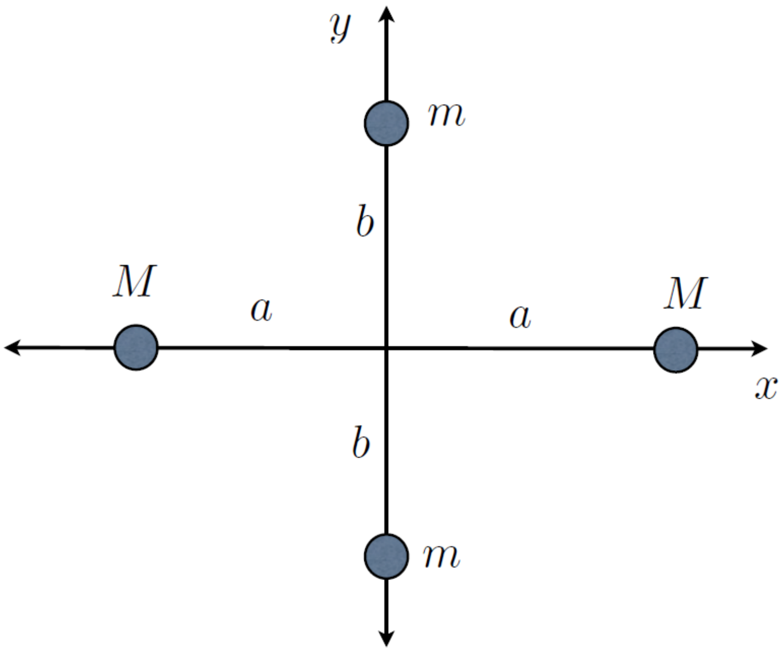


Ejercicio: Momento de Inercia

Calcule el momento de inercia para la siguiente configuración de masas si:

a) Rotan alrededor del eje x

b) Rotan alrededor del eje y



Si $M = 3\,m$ y $a = b/2$:
c) ¿En torno a cuál eje es más fácil rotar el cuerpo?

Resumen

Aceleración total

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_r} \qquad a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Torque

$$\tau = F \times d \times sen\theta$$

Relación entre Torque y aceleración angular

$$\sum \tau = I\,\alpha$$

Momento de Inercia

$$I = \sum m_i\, r_i^2$$