Práctico 2: Inducción Completa

1) Demostrar que la siguiente igualdad se cumple para todos los números naturales:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Demostrar que la suma de los números naturales pares cumple: 0+2+4+…+2n= n(n+1)
3) Demostrar que la siguiente igualdad es valida, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$13 + 21 + 29 + \ldots + (13+8n) = 4n^2 + 17n + 13$$

4) Probar que la siguiente igualdad se cumple $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5) Prueba que el producto de dos naturales consecutivos es múltiplo de 2.
6) Prueba que el producto tres naturales consecutivos es múltiplo de 3.
7) Demuestra que: n^3-n es múltiplo de 6 para todo n natural.
8) Demuestra que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: $\sum_{i=1}^{i=n}(6i+1) = n(3n+4)$
9) Prueba que: $n(n^2+5)$ es múltiplo de 3 para todo n natural.
10) Prueba que las siguientes desigualdades se verifican a partir de cierto natural que se determinará: i) $n^2>n$ ii) $n^2>n+1$.
11) Demostrar por Inducción Completa que las siguientes igualdades se cumplen para todo natural.

a) $\sum_{i=0}^{i=n}(2i) = n(n+1)$	b) $\sum_{i=1}^{i=n}(4i-1) = n(2n+1)$
c) $\sum_{i=1}^{i=n}(5i-2) = \frac{n(5n+1)}{2}$	d) $\sum_{i=0}^{i=n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
e) $\sum_{i=1}^{i=n} i.3^i = \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}$	f) $7 + \sum_{i=1}^{i=2n} 6.7^i = 7^{2n+1}$

12) Considera la afirmación "$7n^2$+3n+5 es par"
    a) Demuestra que si la afirmación es válida para n natural entonces también lo es para n+1.
    b) Muestra que la igualdad es falsa si n=100. ¿Cómo explicas este resultado y el obtenido en a)?
    c) Demuestra que la afirmación es falsa para n natural.

13) Considera la afirmación "n^2-7n-8 es menor que 0"
    a) Demuestra que la afirmación es válida para n=0, n=1, n=2, n=3, n=4, n=5, n=6 y n=7.
    b) ¿Puedes inducir que la afirmación sea cierta para todo n natural? Justifica.

14) Demostrar por IC:

a) $5 + 7^n = \dot{6}$

b) $5^{2n} - 3^{2n} = \dot{16}$

15)

a) Demuestra que $\sum_{i=0}^{i=n}(2^i) = 2^{n+1} - 1$

b) Te proponen regalarte 1 millón de dólares dentro de un mes o 1 peso hoy, 2 mañana, el doble al día siguiente y así sucesivamente durante 1 mes. ¿Qué prefieres y por qué?

16)

a) Determina a y b sabiendo que la siguiente igualdad se verifica para n=2 y n=3.

$$\sum_{i=2}^{i=n}(3i-2) = \frac{3n^2 + an + b}{2}$$

b) Demuestra para los valores de a y b hallados que la igualdad se cumple $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

c) Determina n $\in \mathbb{N}$, para que se verifique la siguiente igualdad, $\sum_{i=2}^{i=n}(3i-2) = 8n - 2$

17) Sea

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(20i-19)}{5} = \frac{an^2 + bn}{10}$$

a) Halla a y b sabiendo que la igualdad se verifica para n=1y n=2. Para los valores de a y b hallados demuestra por Inducción Completa que la igualdad se verifica para todo n natural mayor o igual que 1.

b) Calcular

$\sum_{i=1}^{i=200}\frac{(20i-19)}{5}$	$\sum_{i=105}^{i=200}\frac{(20i-19)}{5}$

c) Calcular n para que:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(20i-19)}{5} = 16038$$

18)

a) Hallar a en $\sum_{i=1}^{i=n}(7i-2) = \frac{(a+7n)n}{2}$ sabiendo que la igualdad se verifica para n=2.

b) Para el valor de a hallado demostrar que la igualdad se verifica para todo n natural mayor o igual que 1.

c) Calcular $\sum_{i=15}^{i=80}(7i-2)$

d) Resolver $\sum_{i=1}^{i=n}(7i-2) = 17255$

19) Sea $\sum_{i=1}^{2n}(4i+1) = an^2 + bn + c$ se sabe que la igualdad se cumple para n=1; n=2 y n=3.

a) Calcular a, b y c.
b) Para los valores hallados probar la igualdad para $\forall n \in N, n \geq 1$
c) Calcular n natural para que $\sum_{i=1}^{2n}(4i+1) = 4n^2 + 20n + 30$
d) Calcular $\sum_{i=1}^{2(n+2)}(4i+1) - \sum_{i=1}^{2n}(4i+1)$

20) Demuestre que

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \geq 1 \quad \text{se cumple} \sum_{1}^{\mathrm{n}} 2\left(3^{\mathrm{i}}\right) = 3^{\mathrm{n}+1} - 3$$

21) Se considera

$$\sum_{i=1}^{i=n}(5i-2) = \frac{n(5n+a)}{2}$$

i. Hallar a, sabiendo que la igualdad se cumple para n=1
ii. Para el valor de a hallado demostrar la igualdad para $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

22) Dada la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n+2}(ai-5) = n^2 + b$$

a. Hallar a y b sabiendo que la igualdad se cumple para n=0 y n=1.
b. Para los valores de a y b hallados demostrar que la igualdad se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$
c. Calcular

$$\sum_{i=21}^{60}(ai-5)$$

23)

Hallar a sabiendo que la igualdad se cumple para n=2

I.

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{a}\right) = \frac{(1+3n)n}{2}$$

II. Para el valor de a hallado demostrar la igualdad $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
III. Hallar el valor de n que verifica:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{a}\right) = n\left(\sum_{i=1}^{i=4}\frac{1}{2}\left(i-\frac{1}{a}\right)\right)$$

24)

I. Calcular N y P tales que: $N = \sum_{i=1}^{2} i^2 + \sum_{i=3}^{5} i^2$ y $P = \sum_{i=0}^{107} 2i - \sum_{i=0}^{105} 2i$

II. Para los valores de N y P hallados demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n}(P+400)i + (N-50) = 13n^2 + 18n + 5$$