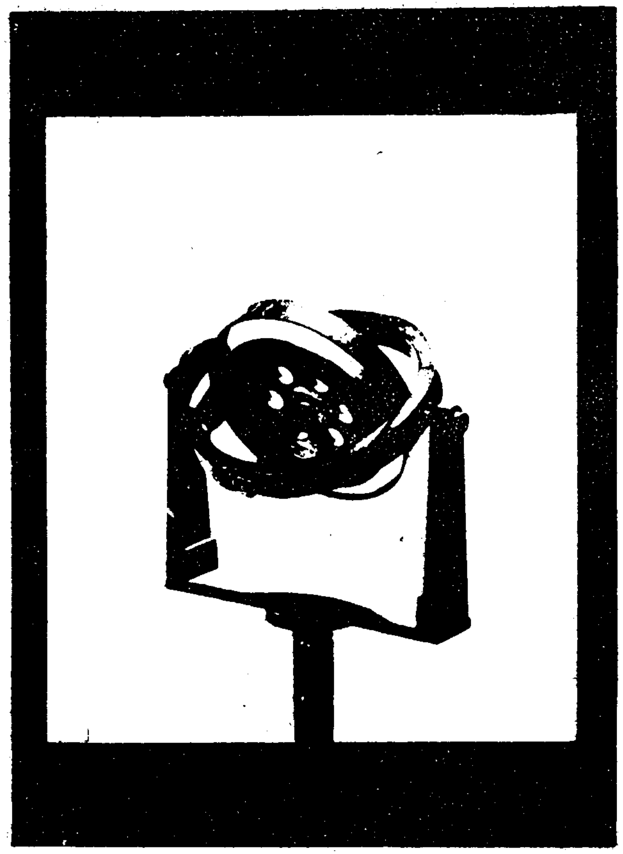
# TEMAS DE FISICA

## ELECTRICIDAD

EDUARDO TORNARIA

# CONTENIDO

# TEMAS DE FISICA



# CAMPO ELECTRICO

# INDICE

# 1. ELECTROSTATICA



## 1.1 ELECTRICIDAD

La *electricidad* rodea al hombre de nuestra época y le ha permitido con sus múltiples aplicaciones mejorar su nivel de vida: La *iluminación eléctrica* posibilita el alumbrado de las calles y las casas. Los *motores eléctricos* con sus infinitos usos en la industria, en el transporte y en el hogar. Las *comunicaciones* por medio del teléfono, la radio, la televisión, etc.

La palabra *electricidad* proviene del griego ("elektron" que quiere decir "ámbar"). Hace 2.500 años, un griego, TALES DE MILETO, descubrió que al frotar una barra de ámbar con una tela o una piel, la barra adquiría la propiedad de atraer pedacitos de tela, pajillas o pelos. Era el comienzo de la electricidad. Muchos años después, en 1600, GILBERT publica los primeros estudios sistemáticos sobre el tema. En 1727 Stephen GRAY, un discípulo de Newton, realiza los primeros experimentos que le permiten establecer la posibilidad que las cargas eléc-

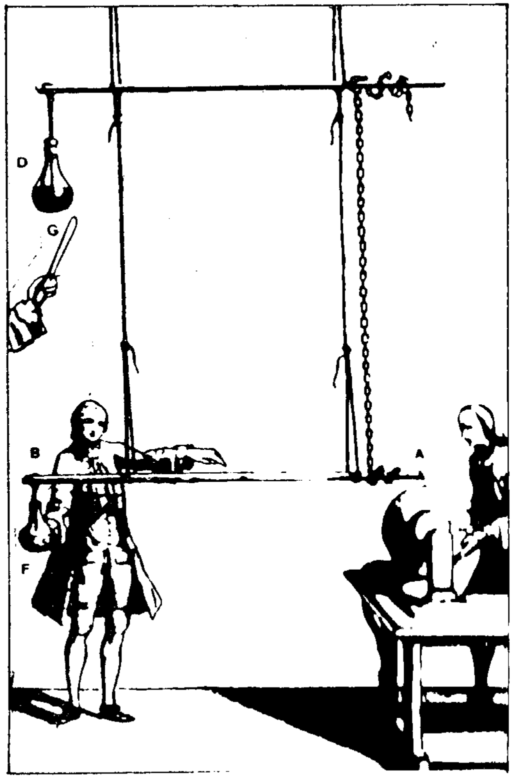



*Fig. 1.1.* Dibujo del siglo XVIII. Ilustra un experimento con electricidad realizado por MUSSCHENBROEK.

tricas viajen de un lugar a otro. El francés DUFAY hizo en 1740 el sorprendente descubrimiento que había dos clases de electricidad, una de las cuales se obtiene frotando un trozo de cristal y otra, frotando un trozo de resina. Esas dos clases de electricidad, llamadas *vítrea* y *resinosa* eran antagónicas entre sí. Los mismos tipos de electricidad se repelían entre sí, pero los opuestos se atraían. A fines del siglo XVIII, Benjamín FRANKLIN, científico y hombre de estado americano, llamó a la electricidad vítrea *positiva* y a la resinosa *negativa*, tal como se la conoce en la actualidad.

## ELECTRICIDAD POR FROTAMIENTO

Frote un peine con un trapo y acérquelo a pequeños trocitos de papel. Comprobará que el peine atrae los papelitos; es un ejemplo de *fuerza eléctrica.*

Si se suspenden con un hilo de nilón, dos esferas metálicas livianas y se las toca con una barra de ebonita (o plástico), previamente frotada con un trozo de piel o lana, se observará que las esferas se repelen entre sí. También se repelerán las dos esferas si se las toca con una barra de vidrio previamente frotada con una seda. Pero si se toca una esfera con la barra de vidrio y la otra esfera con la barra de ebonita, las esferas se atraerán.

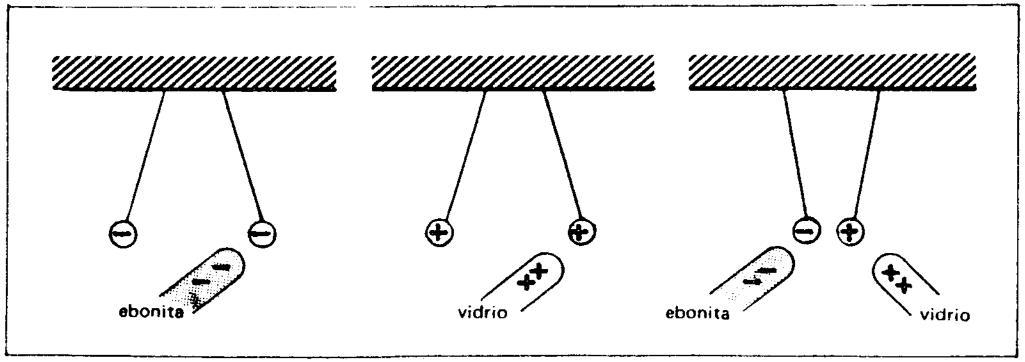
*Cargas eléctricas de la misma clase se repelen, mientras que cargas eléctricas de distinta clase se atraen.*

Al frotar la ebonita con la lana, la ebonita quedó cargada negativamente, ¿cómo ocurre eso? Se puede pensar en que partículas con carga negativa pasaron de la lana a la ebonita o que partículas con carga positiva pasaron de la ebonita a la lana; en cualquier caso la lana debe quedar cargada positivamente. Esto puede comprobarse tocando una de las esferas con la ebonita y la otra con la lana. Las dos esferas deben atraerse.

## CUANTIZACION

Antiguamente se creía que la electricidad estaba constituida por un fluido continuo. La teoría atómica ha demostrado que los fluidos como el agua y el aire no son continuos y tampoco lo es el fluido eléctrico. La carga del electrón constituye la cantidad de carga eléctrica negativa más pequeña que se encuentra en la naturaleza, y cualquier cuerpo cargado negativamente tiene un múltiplo entero de esta carga. Las magnitudes que, como la carga eléctrica, se presentan en forma de *"paquetes"* discretos y no en cantidades continuas, se dice que están *cuantificadas.* Es lo que ocurre también con la masa y la energía, por ejemplo. El cuanto de carga eléctrica *e* es tan pequeño que, a nivel macroscópico, pasa totalmente desapercibido el caracter discontinuo de la electricidad. Por el filamento de una lamparita de 60 W pasan al cabo de 1 segundo la enorme cantidad de $15 \times 10^{18}$ cargas eléctricas!

*Figura 1.2.* Fuerzas entre esferas cargadas eléctricamente.





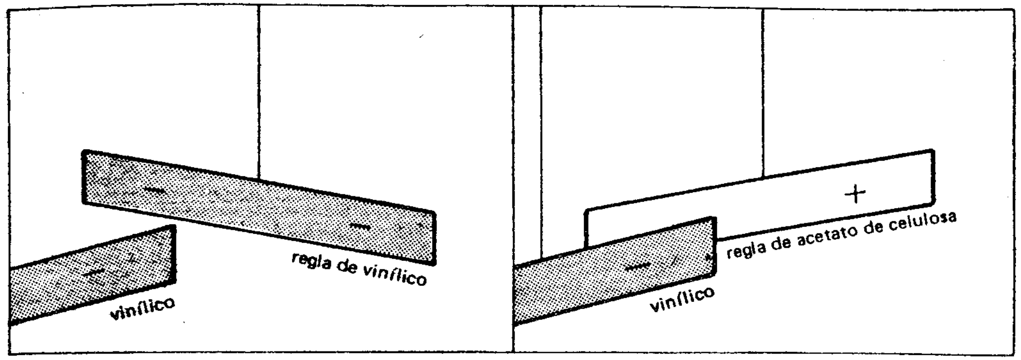




*Figura 1.4.* La regla de vinílico se repele con otra regla de vinílico cargada con el mismo signo y se atrae con una regla de acetato de celulosa cargada con el signo contrario.

## ESTRUCTURA ATOMICA

La materia está formada por partículas muy pequeñas llamadas átomos. Solamente existe un centenar de tipos diferentes de átomos, los que se combinan de distintas maneras para formar moléculas. RUTHERFORD descubrió en 1913 que el átomo posee un núcleo muy pequeño cargado positivamente. A su alrededor hay partículas en movimiento de masa mucho menor y cargadas negativamente llamadas electrones. El átomo normal, en su conjunto, es eléctricamente neutro porque la carga negativa de los electrones neutraliza a la carga positiva de los protones que se encuentran en el núcleo. La carga de un electrón es en valor absoluto exactamente igual a la carga de un protón.

Cuando se frota la ebonita con la lana, algunos electrones de la lana que se encuentran en la periferia de los átomos abandonan la lana y se unen a la ebonita. Este desequilibrio hace que la ebonita quede cargada negativamente por su exceso de electrones mientras que la lana queda cargada positivamente por el exceso de protones que se produce al haberse perdido electrones.

## CONDUCTORES Y AISLADORES

Si una esfera cargada se toca con una varilla metálica, se comprobará que pierde su carga. Las cargas en exceso pasan a través del metal hacia la mano y el cuerpo. Lo mismo ocurre si se sustituye la varilla metálica por un cubierto o por un trozo de madera húmeda. Pero si se repite la experiencia con una varilla de vidrio, de plástico o de cartón, las cargas permanecen en la esfera.

Esta experiencia permite clasificar las sustancias en dos grupos: *conductores* a través de las cuales las cargas eléctricas pueden moverse libremente y *aisladores* o *no conductores* donde las cargas no lo pueden hacer. Mediante delicados experimentos se pudo determinar que, en los metales, sólo las cargas negativas son móviles y corresponden al desplazamiento de los electrones libres que precisamente caracterizan a los metales. Existen otros elementos, los *semiconductores*, que tienen propiedades intermedias entre los conductores y aisladores. Los de uso más difundido son el *Silicio* y el *Germanio*; su conductividad eléctrica puede aumentarse agregándoles impurezas que consisten en pequeñas cantidades de otros elementos.

## CONSERVACION DE LA CARGA

Otra propiedad importante de la carga eléctrica es su *conservación.* Ello significa que en cualquier interacción o reacción, la carga eléctrica total, inicial y final, debe tener los mismos valores. *La carga eléctrica total ni se crea ni se destruye.*

Al frotar la ebonita con la lana, la ebonita quedó cargada negativamente, y la lana adquirió

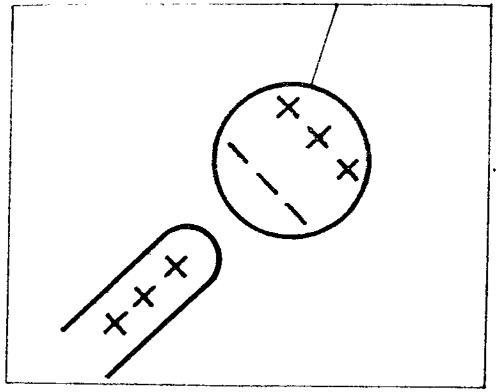


*Figura 1.5.* Al acercar una barra cargada a una esfera neutra, las cargas eléctricas se reordenan en esta esfera originando una fuerza de atracción.

exactamente la misma carga pero de signo contrario. El frotamiento no creó cargas, simplemente las trasladó de un cuerpo a otro alterando la neutralidad inicial, pero la carga eléctrica total se conservó en el proceso.

## CARGA POR INDUCCION

No es necesario el contacto directo con un conductor para que exista un desplazamiento de cargas en él. Cuando se acerca la varilla de vidrio cargada, a una esfera metálica inicialmente descargada, la esfera se mueve hacia la varilla atraída por ésta, la toca y después es repelida. La atracción inicial es debida a que las cargas positivas de la varilla reordenan los electrones en la esfera desplazándolos hacia la zona cercana a la varilla. La zona opuesta queda con una carga neta positiva. La varilla atrae a la zona de la esfera cargada negativamente y repele a la otra zona cargada positivamente. Como la zona negativa de la esfera está más próxima a la varilla, la fuerza de atracción es mayor que la fuerza de repulsión y la varilla atrae a la esfera.

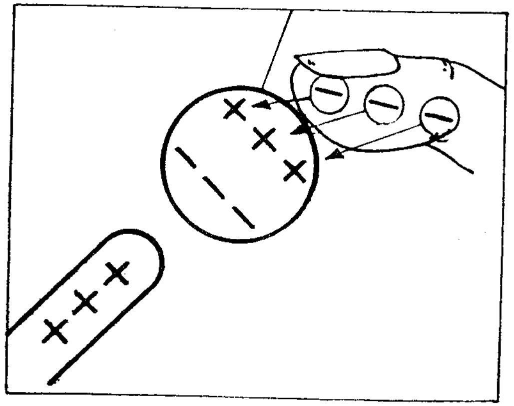
*Inducción electrostática* se llama a la separación de cargas positivas y negativas que se produce en un conductor cuando se le aproxima un objeto cargado. A las cargas que se agrupan en distintas zonas del conductor se les llama *cargas inducidas.*

Si la varilla se separa de la esfera sin que se haya producido contacto directo, las cargas inducidas en la esfera se reordenarán, recuperando la esfera su neutralidad. Si la varilla hubiera tocado la esfera, los electrones hubieran pasado a la varilla quedando la esfera cargada positivamente y esto produciría la repulsión con la varilla cargada positivamente, que se constata después del contacto directo.

Si se toca con el dedo la esfera mientras la varilla de vidrio está próxima a ella, la esfera atraerá electrones provenientes del dedo, y quedará por lo tanto con exceso de carga negativa. Al retirar el dedo y alejar la varilla, la esfera permanecerá cargada negativamente. Se la ha cargado por *inducción electrostática.* Mientras que al cargar un cuerpo por contacto directo, las cargas que adquiere son del mismo signo que las del cuerpo que lo electrizó; al cargarlo *por inducción el signo de las cargas es opuesto a las del inductor.*

Cuando el peine, la ebonita o el vidrio, atraen pedacitos de papel, o pelo, no puede argumentarse migración de electrones pues esos objetos son aisladores. En este caso los átomos resultan *polarizados*. Normalmente en el átomo la carga negativa está centrada respecto al núcleo positivo; cuando se acerca un cuerpo cargado, el átomo se *polariza*, el núcleo se acerca o se aleja del cuerpo según el signo de éste y lo contrario ocurre con los electrones. Esta redistribución de cargas en el átomo posibilita la

*Figura 1.6.* La esfera puede ser cargada por inducción electrostática sin que la varilla con cargas la toque.





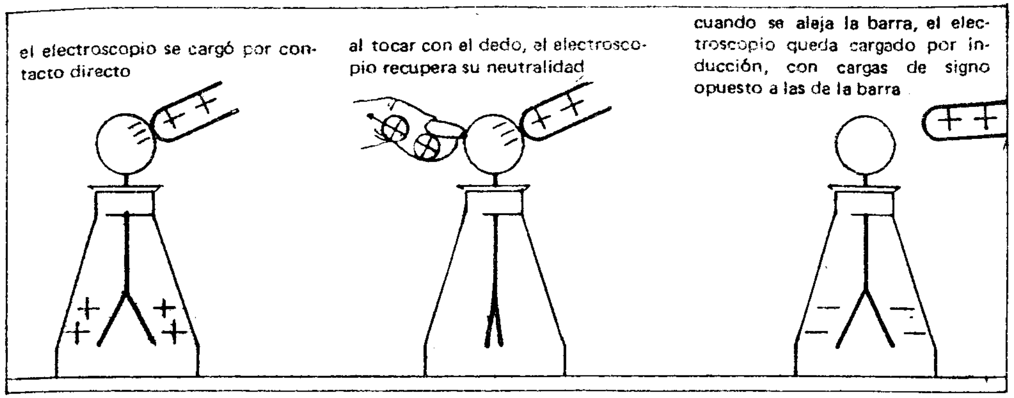



*Figura 1.7.* Carga por inducción de un electroscopio.

existencia de una fuerza neta de atracción que para un solo átomo tiene un pequeño efecto pero que al superponerse con el efecto de los muchísimos átomos presentes en el cuerpo da un valor importante.

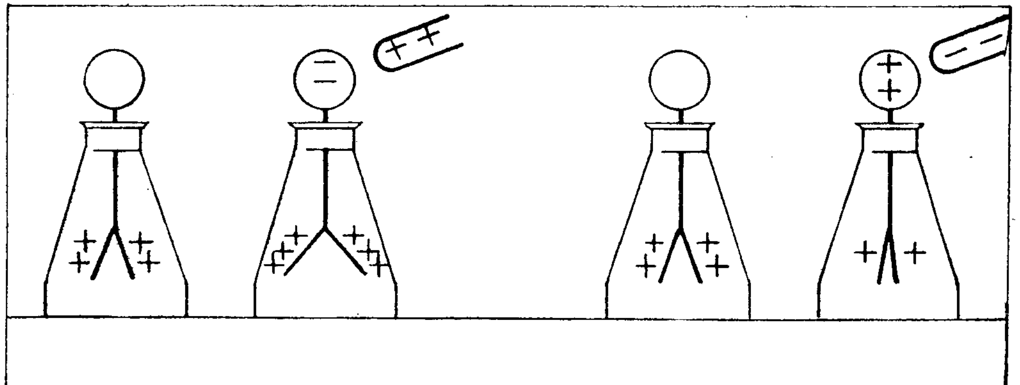
## ELECTROSCOPIO

Un instrumento que permite detectar las cargas eléctricas es el *electroscopio*. Consiste en una varilla metálica vertical terminada en la parte inferior por dos hojas metálicas muy livianas encerradas en un recipiente de vidrio; la parte superior termina en una bolita metálica.

Cuando se toca la bolita con una barra de ebonita o de vidrio previamente frotada, las dos hojas se separan: han sido cargadas por *contacto directo.* Si antes de retirar la barra cargada, Ud. toca momentáneamente con su dedo la bolita del electroscopio, observará que las hojas se juntan, pues el exceso de cargas positivas se ha descargado a través de su dedo. Después, al retirar la barra cargada las hojas se volverán a separar ya que se ha vuelto a perder la neutralidad. El electroscopio ha quedado cargado por *inducción* con cargas de signo contrario a las de la varilla.

También puede utilizarse la inducción electrostática para detectar la presencia de cargas eléctricas en un cuerpo, sin necesidad de transferirlas al electroscopio. Previamente se carga el electroscopio con cargas positivas, por ejemplo. Entonces, si el cuerpo que se acerca al electroscopio está cargado positivamente, induce en la bolita una carga negativa y las hojas metálicas tienden a separarse más. Si el cuerpo que se acerca al electroscopio está cargado negativamente ocurre lo contrario y las hojas metálicas se juntan.

*Figura 1.8.* La carga de un cuerpo puede determinarse acercándola a un electroscopio cargado, sin necesidad de tocarlo.



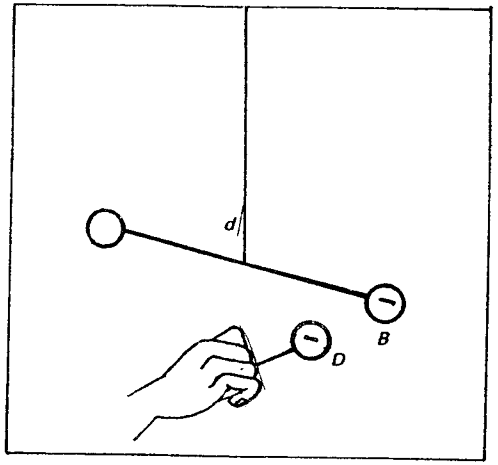



*Figura 1.9.* Esquema de la balanza de torsión. La fuerza eléctrica que actúa sobre la esfera *B* la hace retroceder hacia atrás.

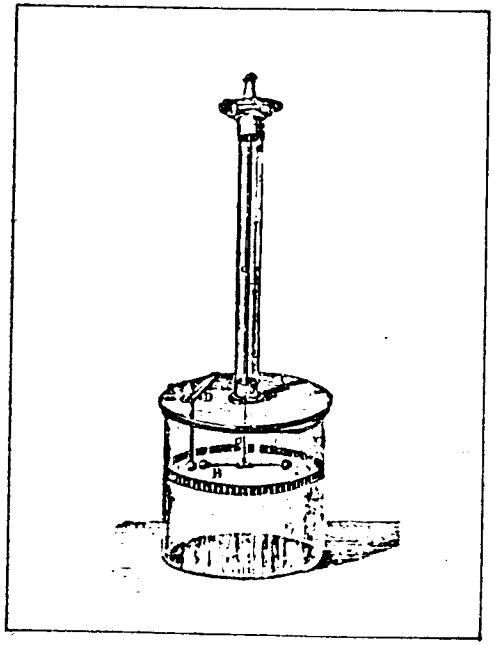
## 1.2 LEY DE COULOMB

Se han tratado hasta ahora, los aspectos cualitativos que rigen la interacción entre cargas eléctricas, comprobándose atracción o repulsión entre ellas según sean de distinto o igual signo. El estudio cuantitativo de estas interacciones constituye una ley fundamental de la electrostática. (*Electrostática* es el estudio de las cargas eléctricas en situación de reposo).

Inicialmente se consideraba que la interacción entre cargas eléctricas, igual que la interacción gravitatoria constituía un tipo de *acción a distancia*, por la cual cada carga actuaba directamente sobre la otra sin que el espacio intermedio desempeñase ningún papel. En realidad, cada carga modifica al espacio que le rodea produciéndole ciertos cambios físicos, los que se ponen en evidencia porque sobre cualquier carga, colocada a cierta distancia de la considerada, actuará una fuerza. Se dice que, en el espacio que rodea a cada carga, se crea un *campo electrostático*. El proceso de interacción entre cargas eléctricas es el siguiente: Cada carga crea en el espacio que le rodea, un campo eléctrico y este campo actúa sobre la otra carga con cierta fuerza. *El campo eléctrico trasmite la acción de una carga a otra.* El estudio del campo eléctrico se realiza investigando las *fuerzas* que, por acción de dicho campo, actúan sobre las cargas.

En 1785, el físico francés Charles COULOMB estableció la relación que vincula las fuerzas de interacción entre dos cargas y la distancia que las separa. Para ello, midió la fuerza de atracción o repulsión entre cargas empleando una *balanza de torsión* (figura 1.10). La balanza de torsión consiste en una varilla de vidrio suspendida de un hilo fino (*d*). En uno de los extremos se coloca una pequeña esfera metálica (*B*) y en el otro, un contrapeso. Una segunda esfera metálica se fija en otra varilla cuya posición (*D*) puede modificarse para cambiar la distancia entre las esferas. Desde el exterior se cargan eléctricamente las esferas y la fuerza de interacción entre ellas hace girar la varilla horizontal. Girando la cabeza de la balanza se puede hacer volver la esfera *B* a su posición inicial. A mayor fuerza eléctrica, mayor será la torsión del hilo. De este modo puede determinarse la fuerza eléctrica midiendo el ángulo de giro de la cabeza de la balanza. Variando la separación entre las cargas, Coulomb pudo determinar que la fuerza de interacción entre las cargas varía en razón inversa al cuadrado de la distancia *r*.

*Figura 1.10.* Balanza de Torsión de Coulomb, presentada en 1785.



$$F \propto 1/r^2$$

la fuerza eléctrica tiene la *dirección de la recta que une las cargas*, siendo de *repulsión* o *atracción* según las cargas sean de igual o diferente signo. Como la interacción de los cuerpos cargados depende de su forma y dimensiones, se supone que se trabaja con cuerpos *puntuales*, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia que los separa; en ese caso la descripción detallada de las posiciones de las cargas no tiene importancia.

Al variar el valor de las cargas eléctricas se modifica la fuerza eléctrica y Coulomb pudo establecer que dicha fuerza es proporcional al producto de las cargas.

$$F \propto q\,q'$$

En la época de Coulomb no existían procedimientos precisos para determinar con exactitud el valor de cada carga; pero, partiendo de una esfera con una carga $q$, y poniéndola en contacto con otra esfera idéntica pero descargada, las esferas se repartirán la carga inicial quedando cada una con una carga $q/2$. Repitiendo el proceso, Coulomb pudo obtener esferas con cargas $q/4$, $q/8$, etc. Los resultados de Coulomb pueden escribirse:

$$F \propto qq'/r^2$$

o también:

$$F = k\frac{qq'}{r^2} \qquad (1\text{-}1)$$

donde $k$ es una constante de proporcionalidad que depende de las unidades empleadas y del medio donde se realizó la experiencia.

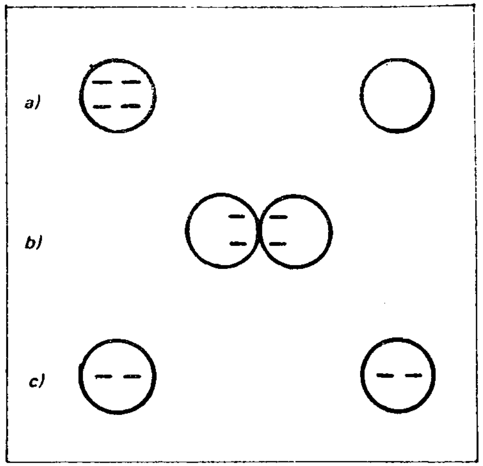
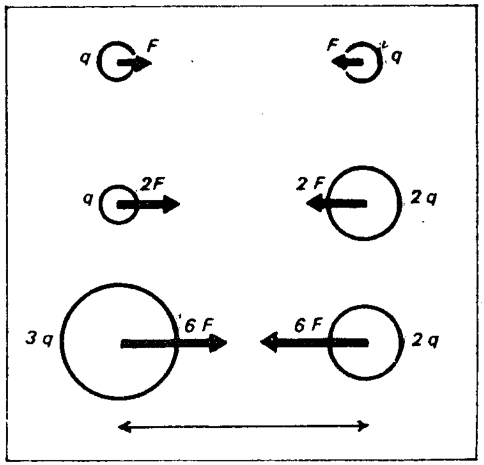



*Figura 1.11.* Procedimiento para subdividir la carga de un cuerpo.

### UNIDADES

Como la carga eléctrica es un concepto independiente de la mecánica, se debe introducir una cuarta unidad fundamental que complemente las otras tres ya definidas en el Sistema Internacional (metro, kilogramo, segundo). Esa cuarta unidad fundamental es, en el S.I., la unidad de corriente eléctrica llamada *ampére (A)*, cuya definición surge más adelante, en términos de la fuerza entre dos conductores.

*Figura 1.12.* La fuerza con que se atraen dos cuerpos cargados, separados una distancia *d*, es directamente proporcional al producto de sus cargas.



La unidad de carga eléctrica en el S.I. es una unidad derivada del ampére, llamada *coulomb (C).* El coulomb se define como la cantidad de carga que pasa en 1 segundo, a través de la sección transversal de un conductor cuando por él circula una corriente de 1 ampére.

El coulomb es una unidad relativamente grande sobre todo si se la compara con la carga del electrón. La carga del electrón expresada en coulomb es

$$1\,e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

lo que significa que se necesitan $6{,}3 \times 10^{18}$ electrones para tener la carga de 1C.

Cuando dos cargas de 1 coulomb se encuentran separadas 1 metro, la fuerza de interacción entre ellas es $8{,}98742 \times 10^{9}$ N, de donde puede deducirse el valor de $k$ en la ecuación 1.1:

$$k = 8{,}98742 \times 10^{9}\ \mathrm{N.m^2/C^2}$$

en este libro se considerará suficientemente preciso el valor con dos cifras significativas, $k = 9{,}0 \times 10^{9}\ \mathrm{N.m^2/C^2}$.

Por razones prácticas, en la ley de Coulomb puede sustituirse la constante $k$ por la expresión $1/4\pi\epsilon_0$; entonces queda:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\,q'}{r^2} \qquad (1\text{-}2)$$

esta forma permite simplificar otras ecuaciones que se derivan de ella y que se emplean con frecuencia.

$\epsilon_0$ es la *constante de permitividad del vacío* y vale:

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N.m^2}$$

que, de acuerdo con la precisión empleada antes, puede redondearse al valor $\epsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N.m^2}$

La ley de Coulomb $F \propto 1/r^2$ tiene una precisión de uno en mil millones. En realidad la fuerza no puede medirse, a partir de la experiencia de Coulomb, con semejante precisión. Es como resultado de experimentos indirectos que se determina que el exponente en la ecuación anterior se encuentra entre 2,000 000 002 y 1,999 999 998. Semejante precisión permite suponer que el exponente es exactamente 2. Lamb y Rutherford demostraron experimentalmente que esa precisión es válida también en escala atómica, a distancias del orden de 1 Å ($10^{-10}$ m). Mediciones en física nuclear permitieron encontrar fuerzas coulombianas a distancias del orden de hasta $10^{-15}$ m.

**EJEMPLO 1**

*Dos esferas cargadas se atraen con una fuerza F cuando se encuentran separados 1,0 cm. ¿Con qué fuerza se atraerán cuando estén a 20,0 cm?*

La ley de Coulomb establece que la fuerza eléctrica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las cargas. Si la distancia se multiplica por 20, la fuerza se dividirá por $(20^2) = 400$. Entonces, a 20 cm la fuerza es $F/400$.

**EJEMPLO 2**

*En un átomo de hidrógeno la distancia que separa el protón del electrón es aproximadamente $0{,}5 \times 10^{-10}$ m. Calcule la fuerza de interacción eléctrica entre el protón y el electrón y compárela con la interacción gravitatoria entre ellos que es $4{,}1 \times 10^{-47}$ N.*

El módulo de la fuerza eléctrica, dado por la ley de Coulomb, es:

$$F = k\,\frac{q\,q'}{r^2}$$

las cargas eléctricas del protón *(q)* y del electrón *(q')* son, en valor absoluto, iguales a $1{,}6 \times 10^{-19}$ C; entonces queda:



$$F = \frac{(9{,}0 \times 10^{9})\,.\,(1{,}6 \times 10^{-19})\,.\,(1{,}6 \times 10^{-19})}{(0{,}5 \times 10^{-10})^2}$$

$$F = 9{,}2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}$$

La relación entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria es:

$$\frac{F_E}{F_g} = \frac{9{,}2 \times 10^{-8}}{4{,}1 \times 10^{-47}} = 2{,}2 \times 10^{39}$$

¡La fuerza eléctrica entre el protón y el electrón es aproximadamente $10^{39}$ veces mayor que la fuerza gravitacional!

**EJEMPLO 3**

*Calcule la fuerza de repulsión eléctrica que existe entre dos protones en un núcleo. Considere una separación de $4{,}0 \times 10^{-15}$ m entre ellos.*

$$F = k\,\frac{q\,q'}{r^2}$$

$$F = \frac{(9{,}0 \times 10^{9})\,.\,(1{,}6 \times 10^{-19})^2}{(4{,}0 \times 10^{-15})^2} = 14\ \mathrm{N}$$

Esta enorme fuerza de repulsión debe ser compensada por una gran fuerza atractiva. Dicha fuerza, que mantiene la cohesión nuclear, se llama *fuerza nuclear.*

## 1.3 SUPERPOSICION

La interacción establecida por la ley de Coulomb se refiere a cargas puntuales. Pero es corriente tratar con distribuciones de cargas, o sea, grupos de cargas colocadas de cierta manera. Es un hecho experimental que para un conjunto de cargas, la fuerza neta que experimenta una carga cualquiera es la *suma vectorial de todas las fuerzas coulombianas que actúan sobre ella.* Si bien este *Principio de Superposición*

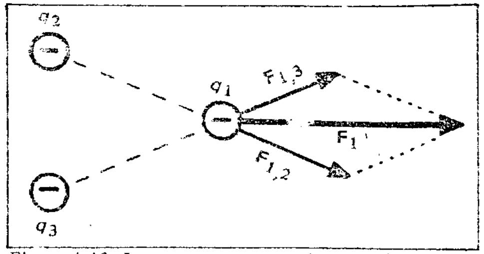
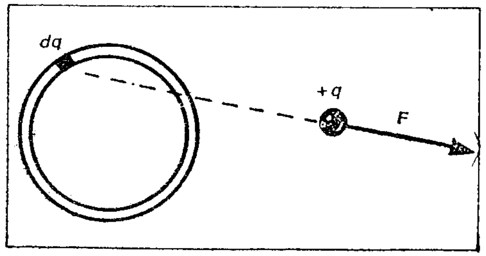



*Figura 1.13.* Las cargas $q_2$ y $q_3$ ejercen sobre la carga $q_1$ una fuerza $F_1$ que es la suma vectorial de las fuerzas $F_{1,2}$ y $F_{1,3}$.

puede parecer obvio, solamente es válido porque las fuerzas son directamente proporcionales a las cargas. En la figura 1.13 se representan los vectores $\mathbf{F}_{1,2}$ y $\mathbf{F}_{1,3}$ que representan las fuerzas que actúan sobre la carga $q_1$, debido a su interacción con las cargas $q_2$ y $q_3$. La fuerza $\mathbf{F}_{1,2}$ es debida a la interacción entre las cargas *1* y *2*, imaginando que la otra carga no existe; la fuerza $\mathbf{F}_{1,3}$ es debida a la interacción entre las cargas *1* y *3* imaginando que la otra carga no existe. La fuerza neta es la *resultante* $\mathbf{F}_1$ (suma vectorial de $\mathbf{F}_{1,2}$ y $\mathbf{F}_{1,3}$) que se halla aplicando las reglas vectoriales (regla del paralelogramo, en este caso).

Cuando hay una distribución continua de carga como la que aparece en un cuerpo cargado, de dimensiones no puntuales, como puede ser un disco, un anillo, una esfera, etc. se lo debe descomponer en partes elementales, cada una de las cuales se pueda llegar a considerar como una carga puntual *(dq)*. La fuerza total que esa distribución de carga ejerce, sobre una carga puntual, por ejemplo, será la suma vectorial de las interacciones que cada elemento de carga *dq* ejerce sobre dicha carga.

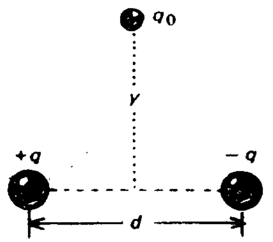
*Figura 1.14.* Cuando se tiene una distribución continua de cargas, como la del anillo en la figura, se lo descompone en cargas elementales *dq*, y se determina la interacción de cada una de ellas con la carga *q*.



EJEMPLO 4

DIPOLO

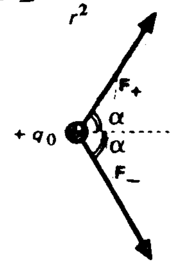
*Una carga positiva y otra negativa de igual magnitud $q$, separadas una distancia $d$, constituyen un dipolo eléctrico. Determinar la fuerza ejercida por el dipolo sobre una carga $q_0$ ubicada sobre la perpendicular por el punto medio del segmento que une las cargas.*




La carga $q_0$ experimenta una fuerza de atracción $(F_-)$ debida a la carga negativa y otra de repulsión $(F_+)$ debida a la carga positiva. Como la carga $+q_0$ se encuentra equidistante de las cargas $+q$ y $-q$, las dos fuerzas, $F_+$ y $F_-$, tienen la misma magnitud. Resulta conveniente descomponerlas según dos direcciones $x$ e $y$. Las componentes según la dirección $y$ son opuestas y se anulan. Las componentes según la dirección $x$ son iguales y se suman.

El módulo de la fuerza ejercida sobre la carga $q_0$ por cada una de las cargas del dipolo es:

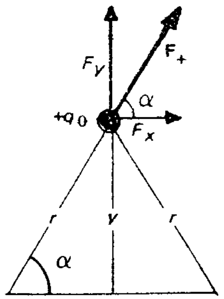
$$F = \frac{kqq_0}{r^2}$$

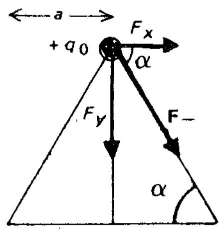



La componente de cada una de esas fuerzas según la dirección $x$ es:

$$F_x = \frac{kqq_0}{r^2} \cos\alpha$$

La fuerza neta tiene la dirección $x$ y vale:




$$F_N = 2F_x = \frac{2kqq_0}{r^2} \cos\alpha$$

donde $r = \sqrt{a^2 + y^2}$

y $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2 + y^2}$ entonces queda

$$F_N = \frac{2kqq_0}{(a^2+y^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$F_N = \frac{2akqq_0}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

Observe que, cuando la distancia $y$ es muy grande, $(y \gg a)$, la fuerza neta queda, aproximadamente:

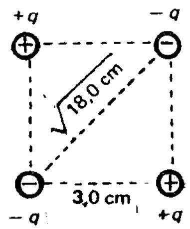
$$F_N \approx \frac{2akqq_0}{y^3} \qquad (1\text{-}3)$$

a grandes distancias, la fuerza eléctrica ejercida por un dipolo sobre otra carga es inversamente proporcional al cubo de la distancia, en lugar de ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Muchas moléculas constituyen un dipolo eléctrico. En la molécula de agua, por ejemplo, el centro efectivo de la carga positiva no coincide con el centro efectivo de la carga negativa. Es debido a esa separación que la molécula puede considerarse como dipolo.

EJEMPLO 5

*Cuatro cargas ($q = 2{,}0 \times 10^{-7}$ C) están ubicadas en los vértices de un cuadrado de 3,0 cm de lado. Determine la fuerza resultante sobre la carga ubicada en el vértice inferior izquierdo.*




El módulo de cada una de las fuerzas que actúan sobre esa carga es:

$$F = \frac{k\,q\,q'}{r^2}$$

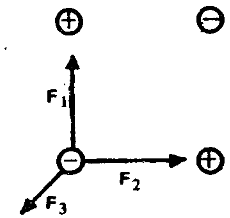
$$F_1 = F_2 =$$

$$= \frac{(9{,}0 \times 10^9) \cdot (2{,}0 \times 10^{-7}) \cdot (2{,}0 \times 10^{-7})}{(3{,}0 \times 10^{-2})^2} = 0{,}40 \text{ N}$$

$$F_3 = \frac{(9{,}0 \times 10^9) \cdot (2{,}0 \times 10^{-7}) \cdot (2{,}0 \times 10^{-7})}{(18{,}0 \times 10^{-4})} =$$

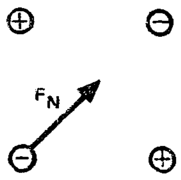
$$= 0{,}20 \text{ N}$$

Por simetría puede verse que $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ tiene la misma dirección que $\mathbf{F}_3$, o sea la dirección de la diagonal del cuadrado.




$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \sqrt{0{,}40^2 + 0{,}40^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}32} \approx 0{,}57 \text{ N}$$

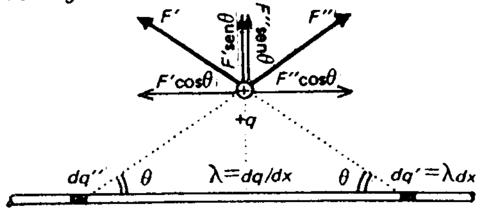



entonces,

$$\left|\vec{\mathbf{F}}_N\right| = \left|\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2\right| - \left|\vec{\mathbf{F}}_3\right| = 0{,}37 \text{ N}$$

**EJEMPLO 6**

*Determine la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga $q$, situada a una distancia $d$ de una línea de carga indefinida de densidad lineal de carga uniforme $\lambda$.*




En este ejemplo, se descompone la distribución continua de cargas en un gran número de pequeñas cargas ($dq$), que interactúan todas con la carga $q$. La superposición de todos los efectos da la fuerza resultante que actúa sobre la carga $q$.

Una gran simplificación se obtiene si se observa que, por cada carga $dq'$, existe otra carga $dq''$, simétrica con la anterior respecto a O. Las fuerzas $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{F}''$ de interacción entre $q$ y $dq'$ y entre $q$ y $dq''$ tienen el mismo módulo. Las fuerzas $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{F}''$ pueden descomponerse en una fuerza perpendicular a la línea de carga y otra fuerza paralela a ésta. Las componentes de $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{F}''$ paralelas a la línea son opuestas, por lo tanto se anulan.

El razonamiento anterior se extiende a todas las otras cargas de la línea. La resultante final será una fuerza perpendicular a la línea de carga. El módulo de esa fuerza puede encontrarse sumando las interacciones de todas las cargas de la línea con la carga $q$. Esta integración implica un cálculo matemático de cierta complicación. Un problema similar se resolverá más adelante empleando otros razonamientos (página 34).

## PROBLEMAS

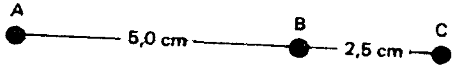
1. Dos esferas cargadas, que en total tienen una carga de + 15 pC se repelen con una fuerza de $5{,}0 \times 10^{-10}$ N cuando están separadas 3,0 cm. Determine la carga de cada esfera.

2. Determine la carga que debería ubicarse, en cantidades iguales en el centro de la Tierra y en una persona de 80 kg para que la fuerza eléctrica equilibre el peso de la persona.

3. Tres esferas igualmente cargadas *A, B* y *C* se hallan equidistantes sobre una recta. Si la esfera *A* ejerce una fuerza de $5{,}0 \times 10^{-5}$ N sobre la esfera *B* que se encuentra en la posición media.
   a) ¿qué fuerza ejerce la esfera *B* sobre la esfera *C*?
   b) ¿qué fuerza ejerce la esfera *A* sobre la esfera *C*?
   c) ¿cuál es la fuerza neta sobre la esfera *C*?
   d) ¿cuál es la fuerza neta sobre la esfera *B*?

4. El núcleo de un átomo de plomo (Pb), tiene 82 protones. Calcule la fuerza de repulsión que aplica este núcleo sobre otro protón que se lleve hasta la superficie de ese núcleo. Suponga que el radio del núcleo es $7{,}2 \times 10^{-15}$ m y que toda la carga se encuentra concentrada en su centro.

5. Si en *A, B* y *C* hay tres cargas iguales y se sabe que la fuerza total sobre la carga central es $3{,}0 \times 10^{2}$ N. Determinar el valor de cada carga.




6. Dos cargas de + 5,0 pC están separadas 6,0 cm. Se coloca una tercera carga de − 3,0 pC sobre la mediatriz de la recta que une las cargas anteriores a 5,0 cm de ellas. Calcule la fuerza neta que actúa sobre la carga de − 3,0 pC.

7. Tres cargas de + 2,0 pC se encuentran en los vértices de un cuadrado de 3,0 cm de lado, ¿cuál es el valor de la carga que se debe colocar en el vértice restante si se desea que la fuerza neta que actúe sobre ella, debida a las otras cargas, sea $1{,}3 \times 10^{-10}$ N.

8. Considere un dipolo eléctrico formado por dos cargas $+q$ y $-q$. Determine la fuerza que el dipolo ejerce sobre una carga $+Q$ colocada en un punto de la recta que une las cargas a una distancia muy grande de ellas.



# 2. CAMPO ELECTRICO

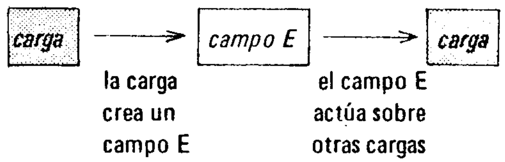


## 2.1 CAMPO ELECTRICO

El espacio que rodea a una carga eléctrica posee propiedades originadas por dicha carga. La carga crea a su alrededor un campo eléctrico. Las propiedades relacionadas con ese campo eléctrico pueden evidenciarse con la ayuda de otra carga, la que al colocarse en algún punto del campo experimenta la acción de una fuerza.

En la época anterior a Faraday, la fuerza entre dos partículas cargadas se interpretaba como una interacción directa e instantánea entre ellas, o sea una *acción a distancia* donde el espacio que separa a las cargas no intervenía. Este mismo concepto se utilizaba para explicar las interacciones gravitatorias y magnéticas. En la actualidad, esas interacciones se explican empleando el concepto de *campo.*

Cada carga eléctrica modifica las características del espacio que le rodea, comunicándole ciertas propiedades que constituyen el *campo eléctrico.* Otra carga colocada en el campo eléctrico, estará sometida a la acción de una fuerza. El campo eléctrico actúa como intermediario de la interacción entre las dos cargas.




## 2.2 INTENSIDAD DEL CAMPO ELECTRICO

Para determinar las propiedades del campo eléctrico se recurre a cargas positivas puntuales (llamadas cargas de prueba), que por su pequeño tamaño no modifican ni la magnitud ni la disposición de las cargas que crean el campo.

Se coloca la carga de prueba $q_0$ en el punto del campo y se determina la fuerza eléctrica $\mathbf{F}$ que actúa sobre ella. La intensidad de campo eléctrico en el punto se define así:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0 \qquad (2\text{-}1)$$

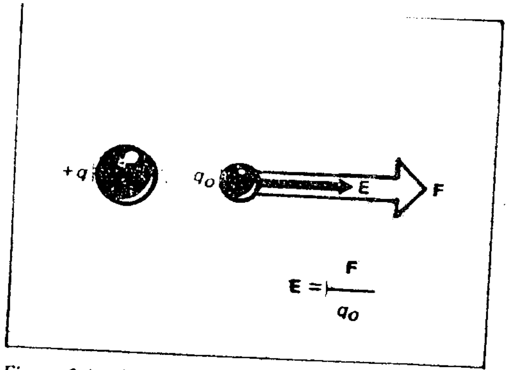
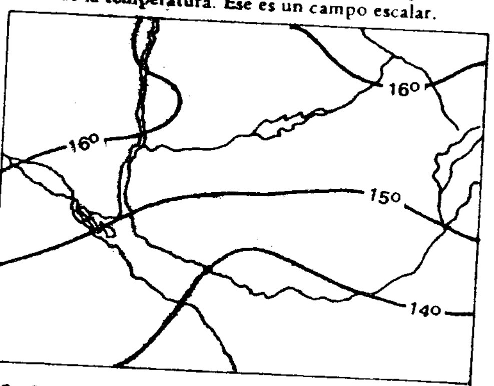



*Figura 2.1.* El valor del campo eléctrico en un punto es independiente de la carga de prueba $q_0$ que se utilice.

**E** es un vector que, (como $q_0$ es positiva), tiene la misma dirección y sentido que el vector **F**, (esa dirección es la dirección en que se movería una carga positiva colocada en reposo en el punto); el módulo del vector **E** es independiente de la carga de prueba $q_0$, porque la fuerza **F** es proporcional a la carga $q_0$. Para cada punto del campo la relación $\mathbf{F}/q_0$ es siempre la misma y constituye una propiedad objetiva del campo.

El campo eléctrico es un campo vectorial, porque asocia a cada punto del espacio un único vector **E**. Otros ejemplos de campo vectorial son el campo gravitatorio y el campo magnético. Los campos vectoriales se diferencian de los campos escalares (como el campo de temperaturas, por ejemplo) en que estos asignan a cada punto un valor numérico y aquellos un vector.

*Figura 2.2.* A cada punto del plano le corresponde un valor de la temperatura. Ese es un campo escalar.






El campo **E** como se ha planteado es simplemente una formulación matemática introducida inicialmente por conveniencia. Si el único problema fuera el de las cargas estáticas, los dos puntos de vista: el de campo y el de acción a distancia serían equivalentes. Pero la situación es diferente cuando una de las cargas se mueve; suponga dos cargas $q$ y $q'$; una de ellas, $q'$ por ejemplo, se acelera hacia $q$; la fuerza de interacción debe modificarse según se modifica la separación entre las cargas. ¿Con qué rapidez se entera $q$ del movimiento de $q'$? El movimiento de $q'$ ocasiona una modificación del campo eléctrico. Esta perturbación se propaga con la velocidad de la luz ($c$ = 300.000 km/s) y un $\Delta t$ después llega a $q$ la información del nuevo campo eléctrico. De acuerdo con la teoría de acción a distancia, la información del nuevo campo **E** debía llegar a $q$ instantáneamente, y esto no está de acuerdo con la experiencia. En el estudio de las ondas electromagnéticas, el concepto de campo adquiere realidad como algo independiente del concepto de acción a distancia.

**EJEMPLO 1**

*¿Cuál es el campo eléctrico para que un electrón colocado en él, reciba una fuerza de origen eléctrico que equilibre a su peso? (masa del electrón, $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg; carga del electrón, $e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C*

El módulo de ese campo eléctrico es:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{mg}{q_0} =$$

$$= \frac{(9{,}1 \times 10^{-31}\ \text{kg}) \cdot (9{,}8\ \text{m/s}^2)}{1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})} =$$

$$= 5{,}6 \times 10^{-11}\ \text{N/C}$$

Su dirección es vertical y su sentido hacia abajo, opuesto al sentido de la fuerza eléctrica porque el electrón es una carga negativa.

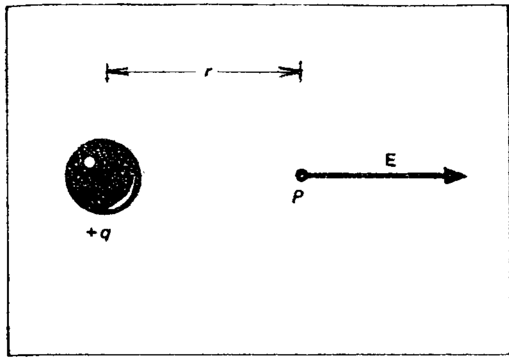



*Figura 2.3.* Campo eléctrico creado en el punto $P$, por una carga positiva.

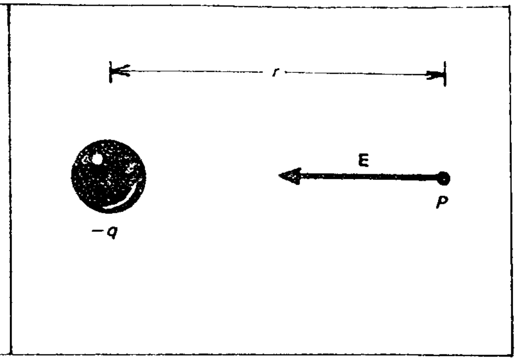



*Figura 2.4.* Campo eléctrico creado en el punto $P$, por una carga negativa.

## 2.3 CAMPO ELECTRICO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL

¿Cuál es el campo eléctrico creado por una carga puntual $q$, en un punto $P$, situado a una distancia $r$ de la carga? De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga de prueba $q_0$ colocada en el punto $P$ es:

$$F = k\frac{q\,q_0}{r^2}$$

Entonces, el campo eléctrico creado por la carga eléctrica $q$ es:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{k\,q}{r^2}$$

$$E = \frac{k\,q}{r^2} \qquad (2\text{-}2)$$

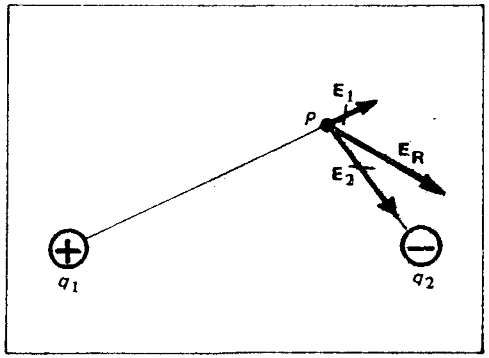
Observe que la intensidad del campo eléctrico es independiente de la carga de prueba $q_0$; depende solamente de la carga $q$ que genera el campo y de la distancia $r$. La dirección del vector **E** coincide con la del vector **F**, por lo tanto el vector **E** está dirigido según la dirección de la línea que une la carga con el punto $P$, y su sentido apunta hacia afuera si la carga $q$ es positiva y apunta hacia la carga si ésta es negativa; en todos los casos la orientación del vector **E** indica el sentido del movimiento que adquiriría una carga positiva colocada en reposo en el punto.

Si el campo eléctrico es creado por una distribución continua de cargas, o por varias cargas puntuales: $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, el campo resultante en un punto es la suma vectorial de los campos eléctricos creados por cada una de las cargas separadamente. Ello es debido a la superposición que, se observa, experimentan las fuerzas eléctricas de interacción entre la carga de prueba $q_0$ y las cargas eléctricas $q_1, q_2, \ldots, q_n$; donde la fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$. Entonces, como $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$

$$\mathbf{E}_R = \frac{\mathbf{F}_R}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \ldots + \frac{\mathbf{F}_n}{q_0}$$

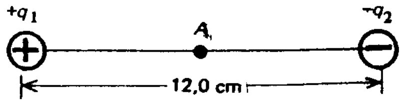
$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n \qquad (2\text{-}3)$$

*Figura 2.5.* Campo eléctrico resultante, creado en el punto $P$, por las cargas $q_1$ y $q_2$.

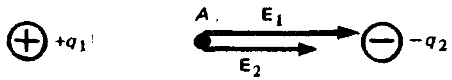


**EJEMPLO 2**

*Determinar el campo eléctrico en el punto A equidistante de dos cargas eléctricas $q_1 = +3{,}0$ pC, $q_2 = -2{,}0$ pC, que se encuentran separadas 12,0 cm.*




En el punto *A* se superponen los campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ generados por las cargas $q_1$ y $q_2$ respectivamente.




$$E_1 = \frac{k\,q_1}{r^2} =$$

$$= \frac{(9{,}0 \times 10^9)\,.\,(3{,}0 \times 10^{-12})}{(6{,}0 \times 10^{-2})^2} = 0{,}75 \times 10 =$$

$$= 7{,}5 \text{ N/C}$$

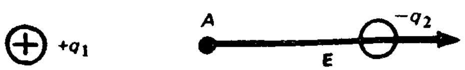
$$E_2 = \frac{k\,q_2}{r^2} =$$

$$= \frac{(9{,}0 \times 10^9)\;(2{,}0 \times 10^{-12})}{(6{,}0 \times 10^{-2})^2} = 0{,}50 \times 10 =$$

$$= 5{,}0 \text{ N/C}$$

El campo eléctrico resultante en el punto *A* es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 7{,}5 + 5{,}0 = 12{,}5 \text{ N/C}$$



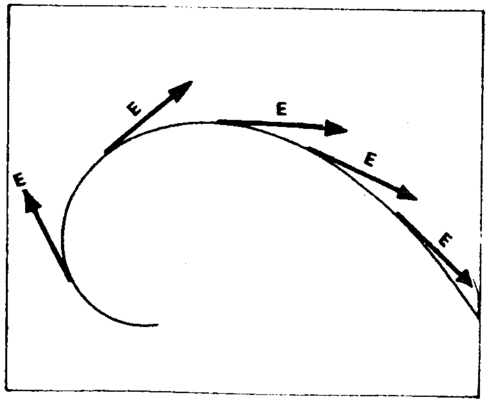

## 2.4 LINEAS DE FUERZA

En el siglo XIX Michael FARADAY desarrolló un procedimiento geométrico que permite representar los campos vectoriales. Ello se logra dibujando las *líneas de campo* o *líneas de fuerza* con las que se puede visualizar el campo aun cuando no se las utilice cuantitativamente.

Las líneas de fuerza son líneas *imaginarias*, que se dibujan en la dirección de la fuerza que actuaría sobre una carga de prueba positiva, colocada en el punto. El vector de campo eléctrico en cada punto es tangente a la línea de fuerza en el punto y su sentido coincide con el de las líneas de fuerza. Las líneas de fuerza se dibujan de modo que el número de líneas por unidad de área perpendicular a ellas sea proporcional a la intensidad del campo **E**. Cuando las líneas están muy juntas, el campo es más intenso que cuando las líneas están muy separadas. Las líneas de fuerza no se cortan nunca, pues si lo hicieran en el punto de intersección no quedaría definido el vector **E**.

La línea de fuerza determina en cada punto la dirección de **E** y por lo tanto la de la fuerza **F** que actuaría sobre una carga positiva colocada allí. Según los principios de la Mecánica, esa carga adquiriría una aceleración a en la dirección de la fuerza, aunque no tendría necesariamente un desplazamiento en esa dirección; solamente cuando las líneas de fuerzas sean rectilí-

*Figura 2.6.* El campo E, es tangente, en cada punto, a la línea de fuerza.





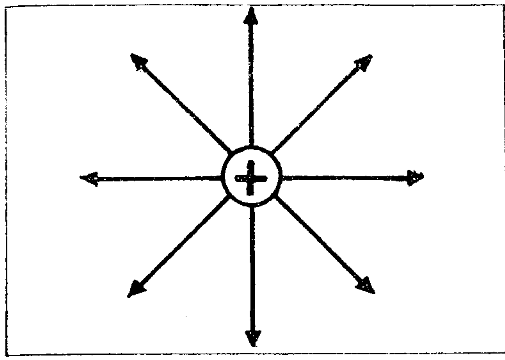



*Figura 2.7.* Líneas de fuerza correspondientes a una carga puntual positiva.

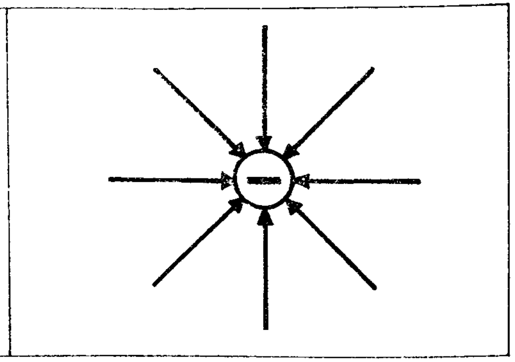


*Figura 2.8.* Líneas de fuerza correspondientes a una carga puntual negativa.

neas y la carga tenga velocidad inicial dirigida en esa misma dirección, se desplazaría según la línea de fuerza.

El campo eléctrico creado por una esfera puntual cargada positivamente queda representado por líneas rectas con dirección radial y que salen de la carga (figura 2.7), porque una carga de prueba positiva, sería acelerada en esa dirección. Observe que en la zona próxima a la carga, donde el campo es más intenso, las líneas están más juntas que a mayor distancia. Si la carga de la esfera fuera negativa, las líneas de campo estarían dirigidas hacia la carga (figura 2.8), pues en esa dirección aceleraría una carga de prueba positiva. Las líneas de campo, correspondientes a dos cargas puntuales de distinto signo, empiezan en la carga positiva y terminan en la carga negativa. En las figuras se representa el campo según dos dimensiones por limitaciones de dibujo, pero el campo existe en las tres dimensiones.

El campo eléctrico es *uniforme* cuando el valor de su intensidad es el mismo en todos los puntos. Las líneas de fuerza que representan ese campo son rectas *paralelas* y *equidistantes*. En la figura 2.10 se representa el campo eléctrico creado por dos placas paralelas infinitas cargadas con signos diferentes. (Considerar placas paralelas infinitas es equivalente a considerar placas de dimensiones muy grandes comparadas con su separación).

No obstante el valor histórico y clarificador de las líneas de fuerza, las ecuaciones del electromagnetismo no se escriben en función de ellas sino en función del campo **E** y de otros vectores de campo.

*Figura 2.9.* Las líneas de fuerza "comienzan" en las cargas positivas y "terminan" en las negativas.

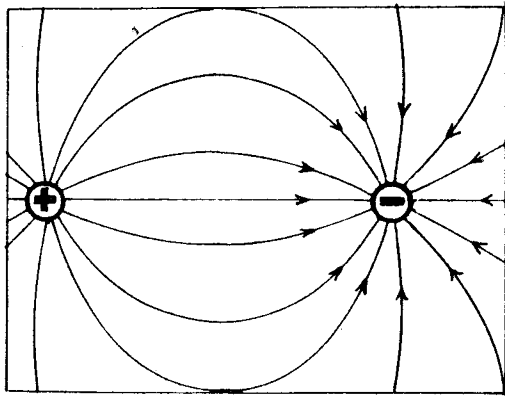
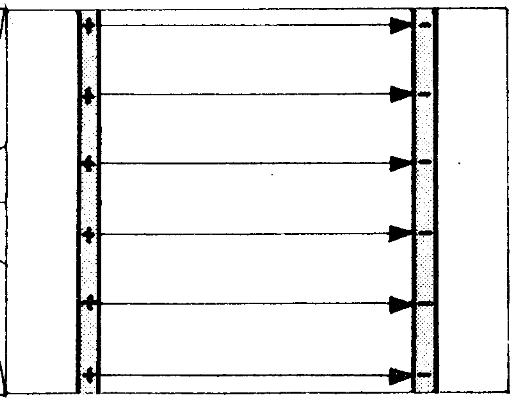


*Figura 2.10.* El campo eléctrico creado por dos placas muy grandes, cargadas positiva y negativamente, es ejemplo de campo eléctrico uniforme.



## 2.5 DIPOLO ELECTRICO

Una configuración de dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ separadas una distancia $2a$, constituyen un dipolo eléctrico. En la página 16 se calculó la fuerza ejercida por el dipolo sobre una carga $q_0$ ubicada sobre la perpendicular trazada por el punto medio del segmento que une las cargas:

$$F = k\,\frac{2aqq_0}{r^3}$$

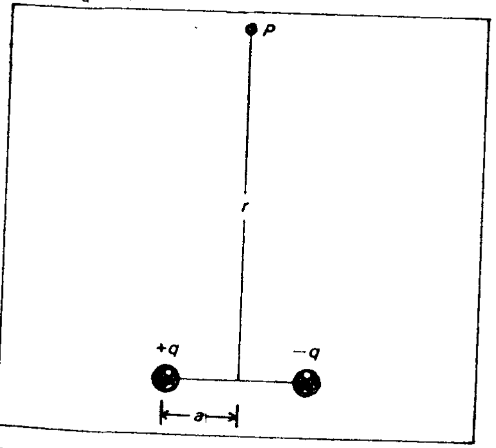
Entonces el campo eléctrico creado por el dipolo a esa distancia $r$ es:

$$E = k\,\frac{(2a)\,(q)}{r^3} \qquad (2\text{-}4)$$

Los elementos característicos del dipolo son la magnitud de cada carga $q$ y la separación $2a$ entre ellas. El campo eléctrico creado por el dipolo es proporcional al producto de esas cantidades, de manera que si, por ejemplo, se duplicara la distancia entre las cargas y simultáneamente se redujera a la mitad el valor de las cargas, el campo no variaría. El producto $2aq$ se llama momento del dipolo eléctrico *(p)*.

$$p = 2aq \qquad (2\text{-}5)$$

*Figura 2.11.* El campo eléctrico creado por el dipolo, varía según $1/r^3$.



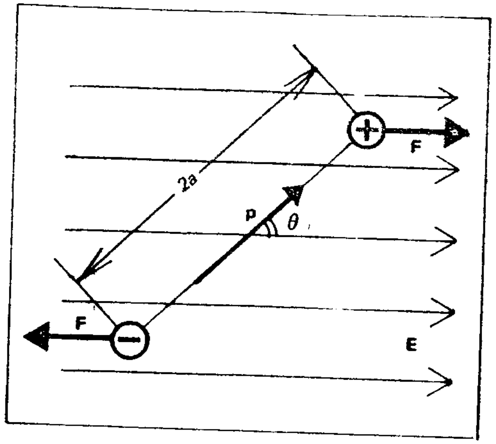




*Figura 2.12.* El dipolo en un campo eléctrico exterior.

El campo eléctrico creado por el dipolo puede expresarse en función del momento dipolar:

$$E = k\,\frac{p}{r^3} \qquad (2\text{-}6)$$

El campo eléctrico creado por el dipolo varía según $1/r^3$, por lo que su intensidad disminuye más rápidamente que la del campo creado por una carga puntual que varía según $1/r^2$. Esto es debido a que a grandes distancias los campos eléctricos creados por las cargas individuales se contrarrestan.

El momento del dipolo se puede considerar como un vector **p** cuyo módulo es $p = 2aq$, orientado en la dirección de la recta que une las cargas y dirigido de la carga negativa a la carga positiva.

### EL DIPOLO COLOCADO EN UN CAMPO ELECTRICO

La figura 2.12 muestra un dipolo eléctrico **p** colocado en un campo eléctrico uniforme, el momento del dipolo forma un ángulo $\phi$ con el campo. Sobre el dipolo actúan dos fuerzas de igual magnitud pero sentidos opuestos. Esas dos fuerzas forman un par que tiende a alinear al



dipolo con el campo eléctrico y cuyo momento es:

$$M = F\,(2a \operatorname{sen}\theta) = 2aF \operatorname{sen}\theta$$

el módulo de cada una de las fuerzas eléctricas es $F = qE$, entonces:

$$M = 2aqE \operatorname{sen}\theta \qquad (2\text{-}7)$$

y sustituyendo $p = 2\,aq$, queda:

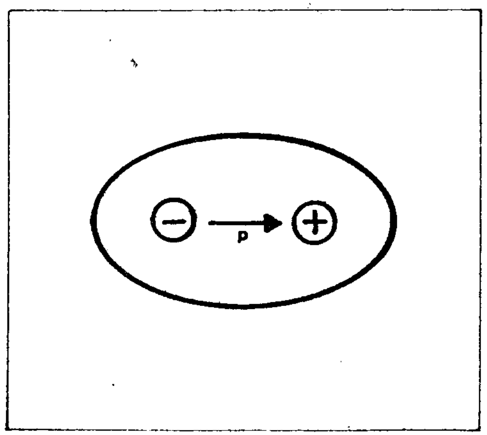
$$M = p\,E \operatorname{sen}\theta \qquad (2\text{-}8)$$

Esta ecuación puede escribirse en forma vectorial, como un producto vectorial:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (2\text{-}9)$$

Los átomos y moléculas son eléctricamente neutros pero como tienen cargas positivas y negativas igual interactúan con los campos eléctricos. En las moléculas polares el centro efectivo de la carga positiva no coincide con el centro efectivo de la carga negativa. Cuando se las coloca en un campo eléctrico, sobre ellas actúa un momento que tiende a orientarlas hasta ponerlas paralelas al campo. Un ejemplo de molécula polar es el NaCl, donde el sodio es un ión de carga positiva $(+e)$ y el cloro un ión de carga

*Figura 2.13.* Esquema de una molecula polar.



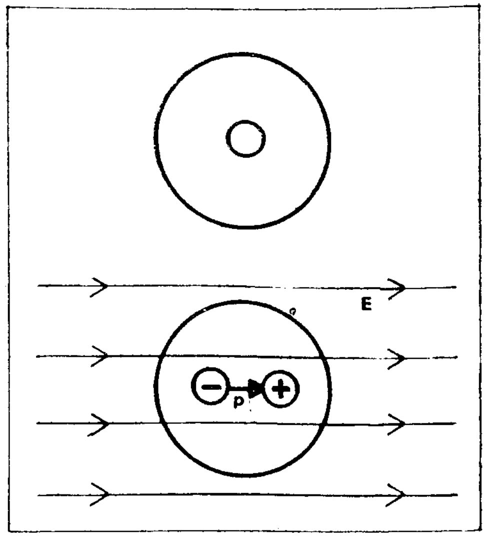




*Figura 2.14.* En una molécula no polar colocada en un campo eléctrico se induce un dipolo.

negativa $(-e)$. El momento dipolar del NaCl es aproximadamente 2e · Å.

En otras moléculas los centros de cargas coinciden normalmente, pero al colocarlas en un campo eléctrico, éste actúa sobre las cargas positivas y negativas con fuerzas opuestas; el campo eléctrico separa o polariza dichas cargas y la molécula pasa a comportarse como una molécula polar donde se ha inducido un momento dipolar *p*, (figura 2.14).

**EJEMPLO 3**

*El momento dipolar de la molécula de HCl, donde la carga separada es la carga del electrón, vale 1,3 D (El debye (D) es una unidad de momento dipolar de uso frecuente aunque no pertenece al S.I., 1D = $1/3 \times 10^{-29}$ C.m). Determine la distancia entre las cargas.*

El momento dipolar es $p = 2aq$, entonces:

$$2a = \frac{p}{q} = \frac{(1{,}03) \times (1/3 \times 10^{-29})}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 0{,}5\ \text{Å}$$

## 2. PROBLEMAS

1. Calcule la intensidad del campo eléctrico, creado por una carga puntual de 50 pC, en un punto separado 20 cm de la carga.

2. Dos cargas de + 6,0 pC y − 2,0 pC se encuentran separadas una distancia de 15 cm. Determine la ubicación de los puntos donde el campo eléctrico creado por esas cargas es nulo.

3. La experiencia de MILLIKAN (1909) consistió en equilibrar gotitas de aceite cargadas eléctricamente, utilizando el campo eléctrico producido por un par de placas cargadas uniformemente. La fuerza eléctrica que actuaba sobre la gotita equilibraba su peso.
a) calcule la carga de una gotita de masa $m = 1{,}50 \times 10^{-14}$ kg que queda en equilibrio entre dos placas paralelas, cuando e campo eléctrico es $E = 1{,}53 \times 10^{5}$ N/C
b) ¿Cuántas cargas elementales contiene en exceso la gotita de aceite anterior?

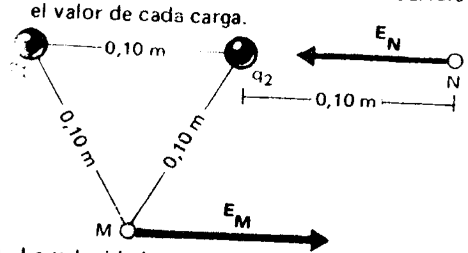
4. El campo eléctrico en un punto $P$, alineado con dos cargas iguales y de las que dista 5,0 cm y 2,5 cm respectivamente, vale 480 N/C. Determine el valor de las cargas.

5. Dos cargas iguales de + 5,0 pC se encuentran en el eje $x$, en los puntos $x = -3{,}0$ cm y $x = +10{,}0$ cm. Determinar
a) el campo eléctrico en un punto ubicado en el eje $y$ en $y = +4{,}0$ cm.
b) la fuerza sobre un electrón colocado en ese punto.

6. Dos cargas iguales, crean en el punto $A$ un campo eléctrico de módulo $\sqrt{2} \times 10^{3}$ N/C Una carga se encuentra sobre el eje $x$, en $x = +3{,}0$ cm; y la otra sobre el eje $y$, en $y = +3{,}0$ cm. El punto $A$ está en el origen. Determine el valor de las cargas.

7. En los vértices de un cuadrado de 2,0 cm de lado hay cuatro cargas puntuales de + 2,0 pC. Determine el campo eléctrico en el punto donde se cortan las diagonales.

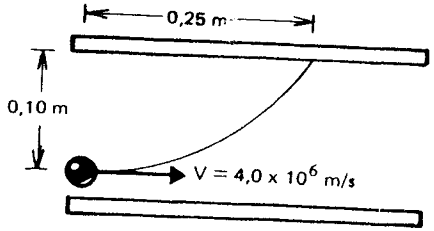
8. El campo eléctrico creado por las cargas puntuales $q_1$ y $q_2$ en los puntos $M$ y $N$ está indicado en la fiqura siguiente. El módulo de $E$ en el punto $N$ es 1,35 N/C. Calcule el valor de cada carga.




9. La velocidad con que llega un electrón a la zona entre dos placas paralelas es perpendicular al campo eléctrico creado por ellas. La trayectoria del electrón en esa zona ¿será paralela a las líneas de campo?

10. Un protón pasa por un punto $P$ con velocidad $v = 2{,}0 \times 10^{6}$ m/s en dirección paralela a un campo eléctrico $E = 1{,}0$ N/C que lo frena y lo hace regresar. ¿Cuánto tiempo emplea el protón en volver a pasar por el punto $P$?

11. Un electrón que se mueve con una velocidad horizontal $v = 4{,}0 \times 10^{6}$ m/s, entra en una zona donde existe un campo eléctrico uniforme creado por dos placas paralelas que lo desvía de su trayectoria según se indica en el croquis adjunto. Determine las características del campo eléctrico creado por las placas.




12. Calcule el valor del campo eléctrico creado por un dipolo eléctrico en un punto $P$, ubicado sobre el eje que une las cargas, a una distancia $r$, muy grande, del centro del dipolo.



# 3. LEY DE GAUSS

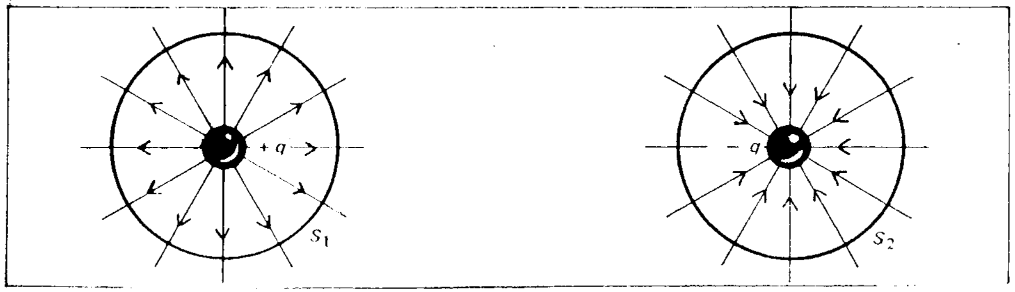


## 3.1 FLUJO DE CAMPO ELECTRICO

El número de líneas de fuerza con que se representa un campo eléctrico se dibuja en proporción a la intensidad del campo eléctrico. Donde la intensidad del campo eléctrico sea mayor se traza mayor número de líneas de fuerza y donde la intensidad de campo eléctrico sea menor se dibujan menos líneas, quedando éstas más espaciadas. El número de líneas de fuerza que atraviesa una superficie determinada, es una medida de una propiedad de los campos vectoriales, que se llama *flujo de campo* ($\Phi$) *a través de la superficie.*

En el caso del campo $\mathrm{E}$, el flujo de campo eléctrico ($\Phi_E$) que atraviesa una superficie, es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesa dicha superficie. Cuando las líneas atraviesan una superficie cerrada apuntando hacia afuera, el flujo de campo eléctrico es positivo. Cuando las líneas de campo atraviesan la superficie cerrada entrando al volumen limitado por dicha superficie, el flujo es negativo. En la figura 3.1, el flujo eléctrico a través de la superficie de una esfera, cuya intersección con la hoja del libro es la línea $S_1$, re-

*Figura 3.1.* Flujo de campo eléctrico; a través de $S_1$ es positivo; a través de $S_2$ es negativo.



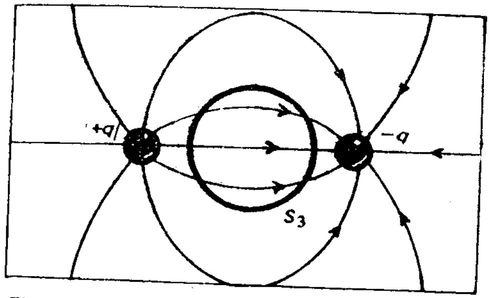



*Figura 3.2.* El flujo a través de $S_3$ es nulo.

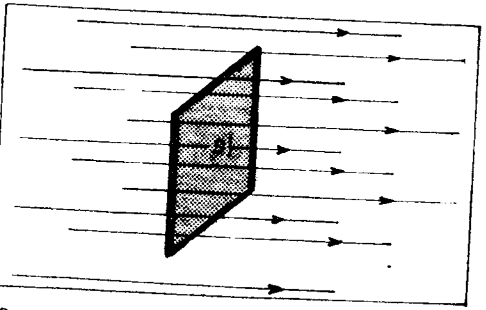
sulta ser positivo pues las líneas de campo atraviesan $S_1$ hacia afuera. El flujo a través de $S_2$, en cambio, es negativo. Cuando la superficie considerada no encierra ninguna carga (figura 3.2), el flujo a través de ella es nulo, puesto que el mismo número de líneas que entran, ($\Phi_E < 0$) después salen, ($\Phi_E > 0$).

El uso del vocablo flujo, se originó en el estudio del movimiento de un fluido. En ese caso el flujo representa el volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo a través de la superficie. En el flujo de campo eléctrico, sin embargo, no hay nada material que fluya a través de la superficie.

## CALCULO DEL FLUJO ELECTRICO

Considere primeramente un campo $\mathbf{E}$ uniforme; **las líneas de fuerza que lo representan (figura 3.3) son paralelas y equidistantes y se dibujan de modo que el número de líneas por unidad de área perpendicular a ellas sea proporcional a la intensidad del campo E.**

*Figura 3.3.* El flujo eléctrico a través de la superficie $S$ es $\Phi = E.S$



El número de líneas que atraviesan la superficie $S$ en la figura 3.3, es proporcional al campo $E$ y también a la superficie $S$, entonces, es proporcional al producto $E \,.\, S$

$$N \{ \; E \,.\, S$$

El producto $E.S$ se denomina *flujo de campo eléctrico ($\Phi_E$) a través de la superficie S.*

$$\Phi_E = E \,.\, S$$

y entonces el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas que atraviesa la superficie $S$.

$$N \{ \; \Phi_E$$

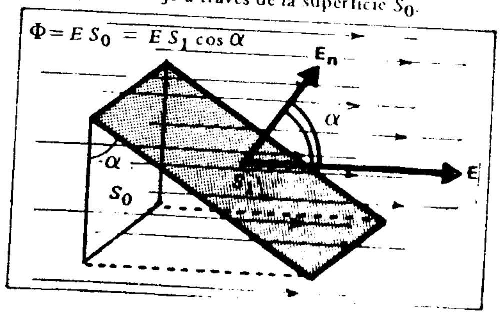
En la figura 3.4 la superficie $S_1$ forma un ángulo $\alpha$ con las líneas de fuerza. La superficie $S_0$ es la proyección de $S_1$ según una dirección perpendicular a las líneas de campo ($S_0 = S_1 \cos \alpha$). Observe que las líneas que atraviesan la superficie $S_1$ atraviesan también la superficie $S_0$. Entonces $\Phi_E = E \,.\, S_0 = E \,.\, S_1 \cos \alpha$

Como $E \cos \alpha$ es la componente del campo en la dirección normal a la superficie, se puede escribir:

$$\Phi_E = E_n \,.\, S \qquad (3\text{-}1)$$

*Flujo = componente normal del campo x superficie.*

*Figura 3.4.* El flujo eléctrico a través de la superficie $S_1$ es igual al flujo a través de la superficie $S_0$.





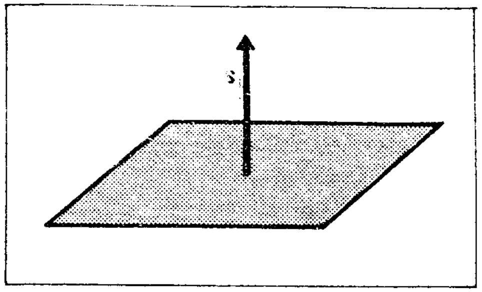




*Figura 3.5.* Vector que representa a la superficie S.

Una superficie puede ser representada por un vector, cuyo módulo está dado por el valor de la superficie $S$, su dirección es normal a la superficie y su sentido debe ser definido convencionalmente; cuando la superficie es cerrada el vector $\mathbf{S}$ apunta, por convención, hacia el exterior.

El flujo eléctrico puede ser definido a partir de los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{S}$, realizando el producto escalar entre ellos:

$$\Phi_E = \mathbf{E} \,.\, \mathbf{S} = E \,.\, S \cos \alpha \qquad (3\text{-}2)$$

El signo del flujo eléctrico depende del ángulo $\alpha$ que formen las líneas de campo con la dirección normal que se ha elegido como positiva. Cuando el campo $\mathbf{E}$ es *"saliente"* ($\alpha$ entre 0° y 90°), el flujo eléctrico es *positivo*. Cuando el campo $\mathbf{E}$ es *"entrante"* ($\alpha$ entre 90° y 180°), el flujo eléctrico es *negativo*. Si la superficie $\mathbf{S}$ es paralela a las líneas de campo ($\alpha = 90°$), el flujo eléctrico es *nulo*, ninguna línea atraviesa la superficie $\mathbf{S}$.

La definición de flujo puede extenderse a superficies curvadas, donde el campo eléctrico varíe tanto en dirección como en módulo. En esos casos se divide la superficie en un gran número de elementos, $\Delta S$, cada uno de ellos tan pequeño como fuera necesario para que su superficie pueda considerarse como plana y tal que la variación del campo eléctrico en ellos sea despreciable.

El flujo eléctrico a través de cada elemento

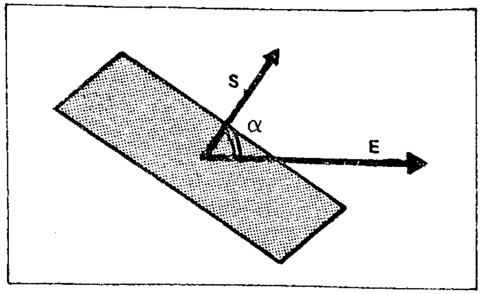



*Figura 3.6.* Angulo que forma el campo eléctrico con la normal a la superficie y que interviene en el cálculo del flujo.

de superficie es:

$$\Delta\Phi = \mathbf{E} \,.\, \Delta\mathbf{S} = E \,.\, \Delta S \cos \alpha$$

donde $\Delta \mathbf{S}$ es el vector normal al elemento de superficie. El flujo a través de toda la superficie es la suma de los $\Delta\Phi$ calculados con todos los elementos.

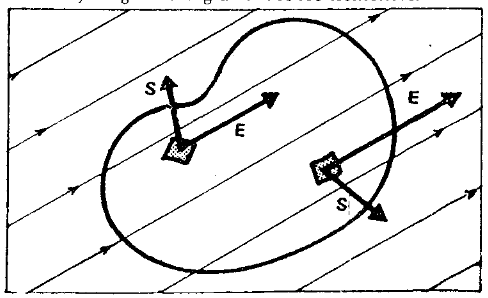
$$\Phi = \Sigma \; \mathbf{E} \,.\, \Delta\mathbf{S} = \Sigma \; E \; \Delta S \cos \alpha$$

Cuando se consideran superficies elementales $d\mathbf{S}$, queda para el flujo elemental: $d\Phi = \mathbf{E} \,.\, d\mathbf{S}$ y el flujo a través de la superficie $\mathbf{S}$ será:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \,.\, d\mathbf{S} \qquad (3\text{-}3)$$

que es una integral extendida a toda la superficie considerada, e indica que la superficie debe dividirse en elementos infinitesimales de área $d\mathbf{S}$ y que debe calcularse $\mathbf{E} \,.\, d\mathbf{S}$ para cada elemento y después hacer la suma. El símbolo $\oint$ con el círculo en la integral, indica que la superficie de integración es cerrada.

*Figura 3.7.* En un caso general se consideran superficies elementales, se calcula el flujo a través de cada una de ellas y luego se integran todos los elementos.



## FLUJO DEL CAMPO ELECTRICO DE UNA CARGA PUNTUAL

*a) La carga está colocada en el centro de una esfera.*

Para calcular el flujo del campo eléctrico de la carga puntual $q$ a través de la superficie esférica, se descompone esa superficie en áreas elementales $d\mathbf{S}$. En cada una de ellas la normal apunta en la dirección radial, lo mismo ocurre con el campo $\mathbf{E}$. Entonces los vectores $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{S}$ son paralelos y por lo tanto el $\cos\alpha = 1$

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}.\, d\mathbf{S} = \oint E\, dS \cos\alpha = \oint E\, dS$$

de acuerdo con la ley de Coulomb, el campo eléctrico tiene la misma intensidad en todos los puntos de la superficie esférica y por eso puede sacarse de factor común

$$\Phi_E = E \oint dS$$

al realizar la suma de todos los elementos $dS$ se obtiene la superficie de la esfera.

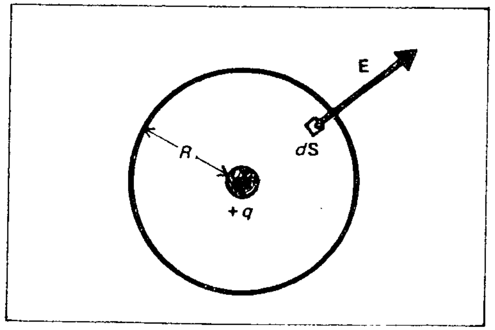
$$\oint dS = S = 4\pi R^2$$

Entonces:

$$\Phi_E = E\,.\,S = \frac{k\,q}{R^2}\, 4\pi R^2 = 4\pi k q$$

$$\Phi_E = 4\pi k q$$

*Figura 3.8.* El flujo eléctrico de la carga a través de la esfera de radio R, es $\Phi_E = q/\epsilon_0$




y recordando que $k = 1/4\pi\epsilon_0$ queda:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Es importante observar que el flujo a través de la superficie esférica es independiente del radio de la misma. Esto es consecuencia de la dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia que experimenta el campo $\mathbf{E}$. De manera que si el radio $R$ de la esfera aumenta, el campo disminuye en proporción a $1/R^2$, pero la superficie aumenta en razón directa a $R^2$ compensando la disminución anterior y de ahí que el producto $E\,.\,S$ permanece constante Por otra parte, el número de líneas de fuerza que atraviesa cualquier superficie esférica con centro en la carga $q$ es siempre el mismo, y por lo tanto el flujo a través de cualquiera de esas superficies debe ser el mismo.

*b) La carga está colocada fuera de la superficie cerrada.*

Se calculará el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que no contiene ninguna carga en su interior y que se encuentra en las proximidades de una carga puntual q. Para ello se considera primero la superficie de la figura 3.9.a. Esa superficie tiene cuatro caras con aristas en las direcciones radiales y dos "tapas" normales al campo. El flujo a través de las superficies radiales es nulo, porque el campo eléctrico no las atraviesa; allí la componente normal de $\mathbf{E}$ es nula. El flujo a través de la superficie $A$ es negativo, y tiene el mismo módulo que el flujo positivo a través de la superficie $B$. En efecto, como $E$ decrece con el cuadrado de la distancia ($E$ { $1/R^2$) y $S$ aumenta con el cuadrado de la distancia ($S$ { $R^2$); el producto $E\,.\,S$ permanece constante. El aumento de la superficie se ve compensado por una disminución del mismo orden con el campo eléctrico $E$. Entonces el flujo total a través de la superficie de la figura es nulo; el número de líneas de campo que entran al volumen limitado por la superficie, es idéntico al número de líneas que salen de él.

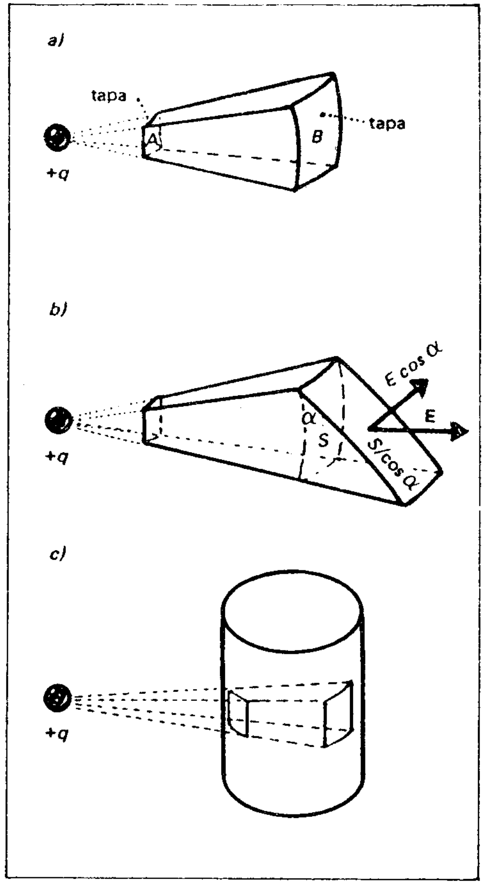



*Figura 3.9.* El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que no contiene cargas es nulo.

Si las "tapas" estuvieran inclinadas (figura 3.9.b), el flujo a través de la superficie también sería nulo, porque si bien la superficie de las tapas experimenta una variación proporcional a $1/\cos\alpha$, la variación de la componente normal del campo es proporcional a $\cos\alpha$ y ambas variaciones se compensan. El flujo a través de esa superficie también es nulo.

Si la superficie fuera cualquiera, como el cilindro en la figura 3.9.c, se lo debe descomponer en pequeñas partes como las consideradas antes, la superficie del cilindro quedará subdividida en pares de superficies y el flujo total a través de su superficie será nulo.

*Cuando la superficie no encierra carga, el flujo eléctrico a través de ella será nulo.*

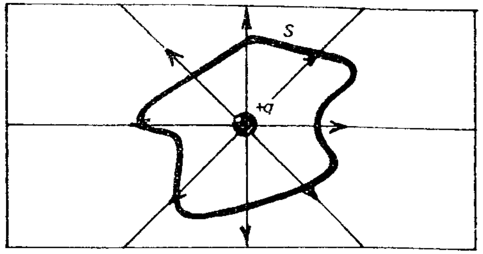



*Figura 3.10.* El flujo eléctrico a través de la superficie S, está relacionado con el número de líneas de fuerza que la atraviesan.

*c) La carga está colocada dentro de una superficie cerrada cualquiera*

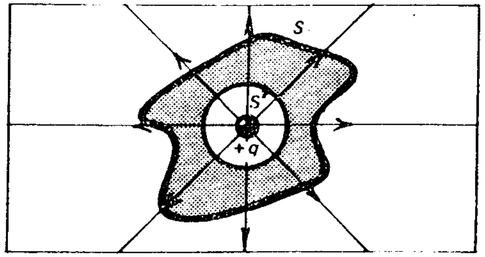
Sea $S$ la superficie a través de la cual se desea calcular el flujo eléctrico de la carga $q$ (figura 3.10). Considere como superficie auxiliar la de una esfera $S'$ con centro en la carga $q$. El flujo eléctrico a través de la superficie $SS'$, formada por las superficies $S$ y $S'$ y que limita al volumen grisado en la figura 3.11, es nulo porque esa superficie no encierra carga eléctrica (caso *b*). Entonces, el flujo entrante a través de la superficie esférica $S'$ es igual al flujo saliente a través de $S$. El flujo a través de la superficie esférica $S'$ fue calculado en el caso *a)* y es:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ese es, también, el flujo saliente a través de la superficie $S$.

*El flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es directamente proporcional a la carga q encerrada por dicha superficie.*

*Figura 3.11.* El flujo entrante a través de la superficie S', es igual al flujo saliente a traves de la superficie S.



## 3.2 LEY DE GAUSS

Cuando se tiene un sistema con varias cargas, o incluso una distribución continua de carga, pueden generalizarse los resultados anteriores. El campo eléctrico en cualquier punto, es la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por cada carga en forma individual $\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n$

Entonces, el flujo eléctrico total es:

$$\Phi = \oint \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{S} =$$

$$= \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\Phi = \oint \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \ldots + \oint \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S}$$

cada término de esta última ecuación corresponde al flujo eléctrico, a través de $S$, de una carga individual; por ejemplo, el primer término es el flujo proporcional a la carga $q_1$ encerrada por la superficie $S$, ($\oint \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = \Phi_1 = q_1/\epsilon_0$), y lo mismo puede extenderse a los otros términos.

$$\Phi = \left(\frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \ldots + \frac{q_n}{\epsilon_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

$$\Phi = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} \qquad (3\text{-}4)$$

Ley de Gauss: *El flujo eléctrico producido por una distribución de cargas, a través de una superficie cerrada* **S**, *es proporcional a la carga neta encerrada por dicha superficie.*

El flujo neto puede ser *positivo* cuando la superficie $S$ encierra un exceso de cargas positivas, *negativo* en el caso contrario y *nulo* cuando la superficie no encierra carga neta (carga neta es la suma algebraica de las cargas, respetando sus respectivos signos). En la figura 3.12 el flujo eléctrico a través de $S_1$ es positivo porque la

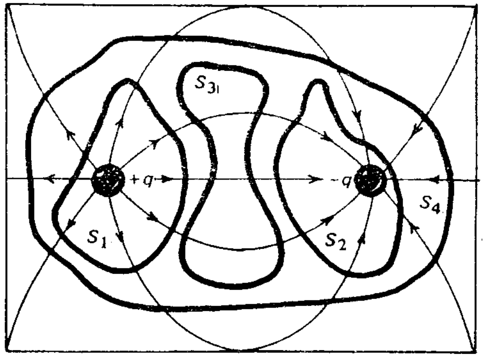



*Figura 3.12.* El flujo eléctrico a través de $S_1$ es positivo, a través de $S_2$ es negativo y a través de $S_3$ y de $S_4$ es nulo. (En la figura se han representado las intersecciones de esas superficies con la hoja del libro).

carga neta encerrada es positiva; el flujo eléctrico a través de $S_2$ es negativo porque la carga neta encerrada es negativa; el flujo eléctrico a través de $S_3$ y $S_4$ es nulo porque la carga neta encerrada por esas superficies es nula. Observe que el número de líneas de campo que salen del volumen limitado por la superficie $S_3$ y por la superficie $S_4$ es igual al número de líneas que entran al mismo.

## 3.3 LA LEY DE GAUSS Y LA LEY DE COULOMB

La ley de Gauss, una de las ecuaciones básicas del electromagnetismo, es consecuencia que el campo eléctrico de una carga puntual varíe en razón inversa al cuadrado de la distancia a la carga. Por lo tanto, la ley de Gauss es otra forma de expresar la ley de Coulomb para muchas cargas. Ambas ecuaciones son equivalentes. Razonando en sentido inverso, la ley de Coulomb puede deducirse de la ley de Gauss.

Considere una carga puntual $+q$ a la que se aplicará la ley de Gauss (figura 3.13). Se calculará el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que rodee dicha carga. Las superficies cerradas que se utilizan en la aplicación de la ley de Gauss se llaman *superficies gaussianas,* no son superficies reales sino conceptos matemáticos, y se eligen aprovechando todas las

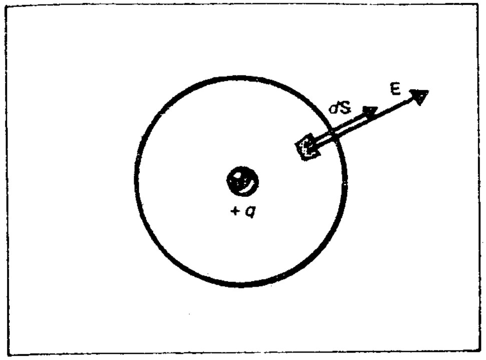



*Figura 3.13.* Vector de campo eléctrico **E** y vector normal $dS$ a la superficie gaussiana.

*simetrías* que existan y permitan simplificar el problema. En este caso, la superficie gaussiana a considerar es una esfera con centro en la carga, pues con ella se obtiene una gran simplificación. En efecto, por simetría, el campo **E** debe ser normal a ella y debe tener la misma intensidad en todos los puntos de esa superficie. El ángulo entre **E** y $d\mathbf{S}$ es nulo y por lo tanto el coseno del ángulo que forman vale 1. Entonces el flujo eléctrico a través de esa superficie esférica queda:

$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E\, dS$$

Como $E$ es constante puede sacarse de factor común en la integral

$$\Phi = E \oint dS$$

y esta integral es la superficie de la esfera, ($S = 4\pi R^2$)

$$\Phi = E \cdot 4\pi R^2$$

de acuerdo con la ley de Gauss:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

entonces:

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}$$

que indica el valor del campo eléctrico en cualquier punto ubicado a una distancia $R$ de la carga. Si se coloca allí otra carga $q'$, la fuerza de interacción entre $q$ y $q'$ será:

$$F = E\, q'$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\,q'}{R^2}$$

que corresponde a la ley de Coulomb. El factor $1/4\pi\epsilon_0$ se introdujo en la ley de Coulomb sustituyendo a la constante $k$, con el objetivo de obtener una expresión más simple para la ley de Gauss que es muy utilizada; de lo contrario la ley de Gauss hubiera quedado expresada en forma algo más compleja:

$$\Phi = 4\pi k q$$

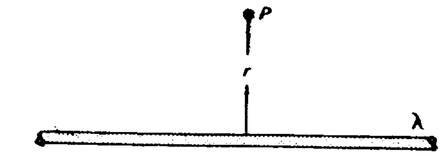
## 3.4 APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

Cuando se tienen muchas cargas, o una distribución continua de cargas que puede considerarse como suma de un número grande de cargas elementales, el campo eléctrico total en un punto está dado por la suma vectorial de los campos eléctricos creados por cada carga individual. En la práctica, esta suma vectorial puede ser muy difícil de efectuar; pero si se emplean las mismas cargas y una superficie gaussiana adecuada puede emplearse la ley de Gauss para determinar fácilmente el campo eléctrico en un punto. En el problema debe existir suficiente simetría, en general esférica, cilíndrica o plana, para poder plantear el flujo de campo eléctrico cuando aún no se conozca el campo **E**. Las aplicaciones siguientes aclaran estos aspectos.

**EJEMPLO 1**

LINEA DE CARGA

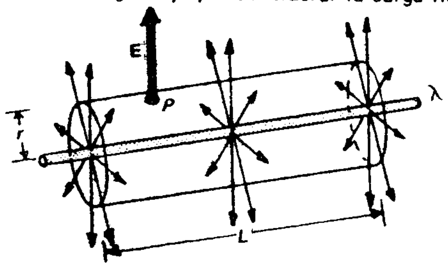
***Calcular el campo eléctrico a una distancia r de una línea de carga de longitud infinita y de densidad de carga λ (carga por unidad de longitud), longitud infinita implica que la distancia r es despreciable frente a la longitud de la línea de carga.***




En la página 17 se analizó parcialmente este problema encontrándose que la fuerza eléctrica sobre una carga positiva era perpendicular a la línea de carga. Esa es, también la dirección del campo eléctrico. Además puede suponerse, apoyándose en la simetría, que la intensidad del campo eléctrico será la misma en todos los puntos equidistantes de la línea. La superficie gaussiana adecuada en este caso tendrá la forma de un cilindro cuyo eje coincide con el de la línea de carga. El campo eléctrico es normal a la superficie lateral del cilindro y tiene la misma intensidad en todos los puntos de esa superficie, entonces el flujo a través de esa superficie es $\Phi = E \cdot S$ donde $S$ es la superficie lateral del cilindro ($S = 2\pi r . L$).

$$\Phi = E \cdot 2\pi r L$$

El aporte de las bases del cilindro al flujo eléctrico es nulo, porque el campo es paralelo a ellas, las líneas de campo son rasantes y no atraviesan dichas bases. Para aplicar la ley de Gauss $\Phi = q/\epsilon_0$ hay que considerar la carga neta






encerrada por la superficie, que en este caso es $q = \lambda \cdot L$. Entonces la ley de Gauss permite calcular el campo $E$

$$\Phi = q/\epsilon_0$$

$$\Phi = \lambda L/\epsilon_0$$

$$E \cdot 2\pi r L = \lambda L/\epsilon_0$$

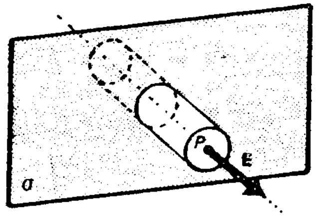
$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \qquad (3\text{-}5)$$

**EJEMPLO 2**

PLANO CARGADO

*Calcular el campo eléctrico en un punto próximo a un plano infinito, cargado uniformemente con densidad de carga σ (carga por unidad de superficie). No es necesario que el plano tenga dimensiones infinitas, alcanza que la distancia entre el punto y el plano sea muy pequeña comparada con las dimensiones del plano.*

Consideraciones de simetría, similares a las empleadas en el caso de una línea de carga, permiten determinar que la dirección del campo es perpendicular al plano y que tiene la misma intensidad a ambos lados del mismo. La superficie




gaussiana a emplear puede ser un cilindro cuyo eje sea perpendicular al plano. El $\Phi$ a través de la superficie lateral es nulo, el campo es paralelo a ella, ninguna línea de campo la atraviesa. El $\Phi$ a través de cada base es $\Phi = E \cdot S$ donde $S$ es la superficie de cada base. Como hay dos bases el flujo total es $\Phi = 2\,E\,S$ y aplicando Gauss,

$$\Phi = q/\epsilon_0$$

$$2\,E\,S = q/\epsilon_0$$

donde la carga neta encerrada por la superficie es $q = \sigma S$. Entonces, queda

$$2\,E\,S = \sigma S/\epsilon_0$$

$$E = \sigma/2\epsilon_0 \qquad (3\text{-}6)$$

Observe que el campo eléctrico creado por un plano infinito cargado, es independiente de la distancia al plano.

**EJEMPLO 3**

DOS PLANOS CARGADOS

*Estudie el campo eléctrico creado por dos planos cargados con $+\sigma$ y $-\sigma$, separados una distancia "d" muy pequeña en comparación con las dimensiones del plano.*

El campo eléctrico en las distintas zonas puede determinarse por superposición de los campos eléctricos creados por cada uno de los planos. El campo debido a un solo plano infinito, según se vio en el EJEMPLO 2, tiene dirección perpendicular al plano y su intensidad es constante y vale $E = \sigma/2\epsilon_0$ . En los puntos interiores, entre los planos, los campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ debidos a ambos planos tienen el mismo sentido y por tanto sus intensidades se suman

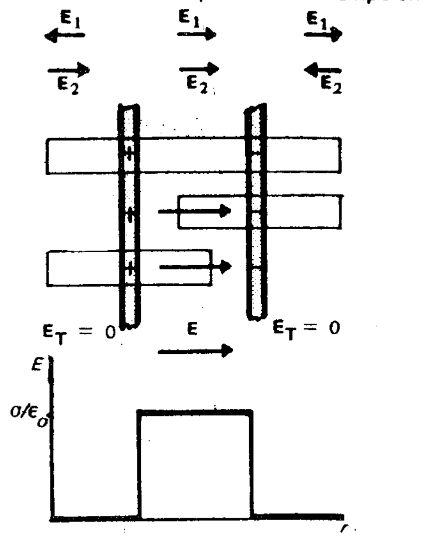
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En los puntos exteriores los campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$, iguales en intensidad, tienen sentidos opuestos y por lo tanto se anulan.

Estos resultados pueden verificarse considerando como superficies gaussianas dos cilindros con ejes perpendiculares a los planos y cuyas superficies de base son iguales a $S$.

El flujo a través del cilindro que atraviesa ambos planos es nulo, porque el campo en las bases del cilindro es nulo, y en la superficie lateral el campo es paralelo a dicha superficie. Entonces de acuerdo con la Ley de Gauss, la carga neta encerrada debe ser nula, que es justamente lo que ocurre porque la carga encerrada por el cilindro correspondiente al plano de la derecha es $+\sigma S$ y la correspondiente al plano de la izquierda es $-\sigma S$; entonces la carga neta encerrada es $+\sigma S - \sigma S = 0$.

El flujo a través del cilindro que atraviesa un solo plano es $\Phi = E\,S$, donde el campo $E$ que interviene en esa expresión es el campo en-




tre los planos, $E = \sigma/\epsilon_0$. Entonces $\Phi = \sigma S/\epsilon_0$ y de acuerdo con la Ley de Gauss, la carga neta encerrada debe ser $q_{neta} = \sigma S$, que es justamente la carga encerrada por ese cilindro. El signo será positivo o negativo, según el cilindro atraviese el plano de la derecha o el de la izquierda.

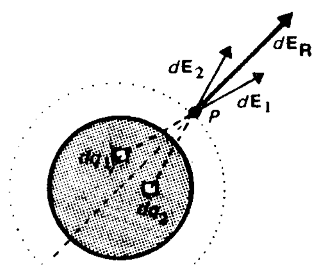
**EJEMPLO 4**

ESFERA MACIZA CARGADA UNIFORMEMENTE

*Considere una esfera maciza de radio R cargada uniformemente con densidad de carga $+\rho$ (carga por unidad de volumen). Determine el campo eléctrico: a) para puntos exteriores de la esfera, b) para puntos interiores.*

*a)* puntos exteriores de la esfera

¿Qué característica tiene el campo eléctrico en un punto $P$ exterior a la esfera? La distribución continua y uniforme de cargas que posee la esfera puede descomponerse en un gran número de cargas elementales $(dq)$. Cada una de estas cargas elementales crea en el punto $P$ un campo E. Si las cargas se consideran en parejas, simétricas respecto a la recta que pasa por $O$ y $P$, los campos eléctricos de estas cargas así apareadas son simétricos respecto a la misma recta y su resultante tendrá la dirección radial. Ese razonamiento puede extenderse al resto de las cargas elementales y el campo eléctrico resultante tendrá entonces dirección radial cualquiera sea el punto $P$ considerado. La superficie gaussiana adecuada para este ejemplo es la superficie de una esfera de radio $r$ concéntrica con la esfera cargada, ya que el campo E es perpendicular a dicha superficie y, por simetría, de módulo constante sobre ella.




Para esa superficie el flujo saliente es:

$$\Phi = \oint \mathbf{E} . d\mathbf{S} = E\,S = E\;4\pi r^2$$

por Gauss, $\Phi = q/\epsilon_0$

$$E\;4\pi r^2 = q/\epsilon_0$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{3-7}$$

Esta expresión coincide con la que se encontraría si toda la carga estuviera colocada en el centro de la esfera.

*b)* puntos interiores de la esfera

Para hallar el campo a una distancia $r$ del centro se considera una esfera auxiliar de radio $r$. Por consideraciones de simetría, puede admitirse igual que antes que el campo es radial y de igual intensidad para puntos que se encuentran a la misma distancia del centro. El flujo a través de esa esfera es:

$$\Phi = \oint \mathbf{E} . d\mathbf{S} = E\,S = E\;4\pi r^2$$

de acuerdo con la ley de Gauss $\Phi = q/\epsilon_0$ donde la carga neta encerrada por la superficie $S$ es:

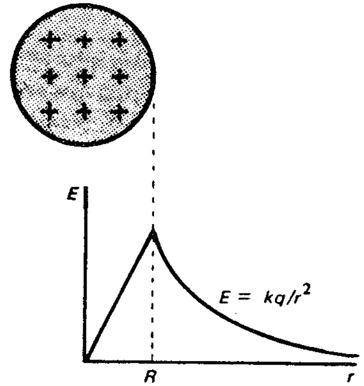
$$q = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3\,\rho$$

entonces queda

$$E\;4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3\,\rho/\epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\,r \tag{3-8}$$

Observe que para puntos interiores a la esfera el campo es proporcional a la distancia al centro de la esfera ($E \propto r$)




**EJEMPLO 5**

CASCARON ESFERICO CARGADO

*La carga q se ha distribuido uniformemente sobre un delgado cascarón esférico de radio R. Estudie el campo eléctrico a) para puntos exteriores; b) para puntos interiores.*

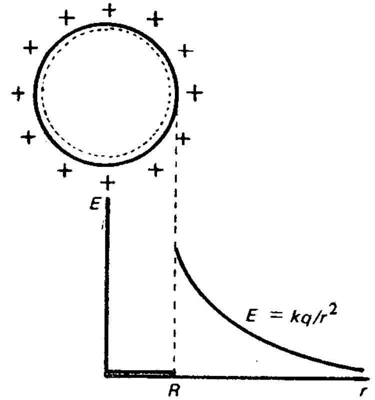
*a)* puntos exteriores

Por las mismas consideraciones de simetría, realizadas en el ejemplo anterior, puede demostrarse que el campo en puntos exteriores al cascarón es igual al producido por una carga puntual $q$ colocada en el centro

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

*b)* puntos interiores

Para puntos interiores el campo debe ser nulo, porque una superficie auxiliar dentro del cascarón no contiene ninguna carga eléctrica.




## 3.5 VALIDEZ EXPERIMENTAL DE LA LEY DE GAUSS Y DE LA LEY DE COULOMB

La ley de Gauss predice que, en el interior de un cascarón esférico cargado, el campo eléctrico se anula (Ejemplo 5). Esto es debido a que la fuerza de Coulomb depende exactamente de la inversa del cuadrado. En efecto, considere un punto $P$ interior donde se calculará el campo. La esfera puede dividirse en superficies elementales $\Delta S$ con el siguiente criterio: Por cada superficie elemental $\Delta S_1$ ubicada a una distancia $r_1$ de $P$ existe otra superficie $\Delta S_2$ ubicada a una distancia $r_2$, tal que ambas superficies están determinadas por el mismo cono cuyo vértice está en $P$ (figura 3.14). La relación entre esas superficies es:

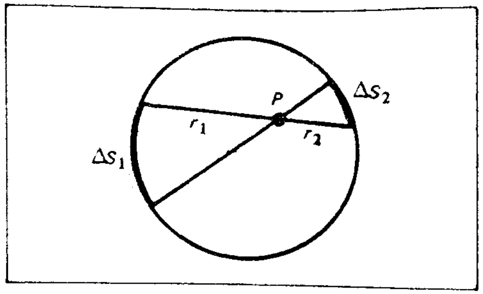



*Figura 3.14.* El campo eléctrico en un punto interior de un cascarón esférico cargado es nulo.

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}}$$

Como el cascarón esférico está uniformemente cargado, la carga $\Delta q$ es proporcional a la superficie $\Delta S$ y por lo tanto a las distancias $r^2$:

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} = \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}}$$

Entonces, el campo eléctrico creado por cada uno de esos elementos en el punto $P$ tiene el mismo módulo y como sus sentidos son opuestos, $E_1$ y $E_2$ se anulan.

$$E_1 = k\frac{\Delta q_1}{r_1^{\,2}} \qquad E_2 = k\frac{\Delta q_2}{r_2^{\,2}}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta q_1/r_1^{\,2}}{\Delta q_2/r_2^{\,2}} = 1$$

El razonamiento se extiende al resto del cascarón esférico y se obtiene que el campo eléctrico resultante en $P$ es *nulo.*

Si la ley de Coulomb no dependiera de la inversa del cuadrado se hubiera llegado a otra conclusión. Entonces, la demostración experimental de que el campo eléctrico en el interior

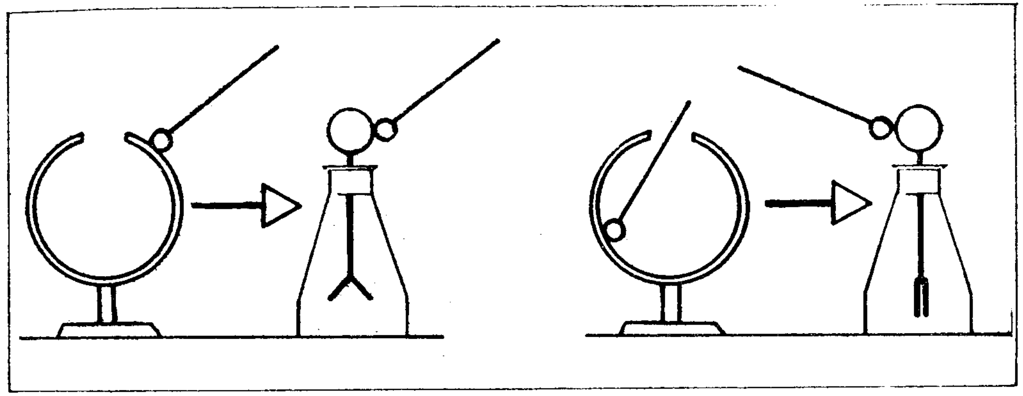


*Figura 3.15.* La carga en el interior de la esfera es nula.

de un cascarón esférico es nulo permite verificar la validez de la ley de Coulomb. No es posible medir la fuerza entre dos cargas con una precisión de, uno en mil millones por ejemplo; pero verificando que el campo eléctrico dentro de una esfera es menor que cierto valor se obtiene una determinación indirecta que es equivalente.

Utilizando un electroscopio para determinar la carga en el interior de una esfera se ha determinado que el exponente en la ley de Coulomb se encuentra entre 2,000 000 002 y 1,999 999 998, lo que constituye la demostración experimental de la validez de las leyes de Gauss y Coulomb.

## 3.6 CONDUCTORES

Los materiales pueden clasificarse en *conductores* o *aisladores (dieléctricos)* según la facilidad con que puedan moverse las cargas eléctricas en ellos cuando son sometidos a la acción de un campo eléctrico. Los conductores eléctricos poseen muchos electrones "libres" que, cuando se encuentran en un campo E, adquieren una velocidad en el mismo sentido en que actúa el campo. En los aisladores, en cambio, los electrones están fuertemente ligados al átomo de forma que en ellos no hay posibilidad de conducción eléctrica. Naturalmente, existen algunos materiales con propiedades intermedias, que incluso pueden ser variables; así los semiconductores son más o menos conductores según la temperatura a la cual se trabaje.

La ley de Gauss aplicada a los conductores eléctricos aislados, que se encuentran en equilibrio electrostático, permite hacer importantes deducciones. Cuando se carga un conductor aislado, *las cargas se distribuyen en la superficie exterior del conductor.* En efecto, al colocar cargas extras en el interior del conductor se produce allí un campo eléctrico. Por acción de ese campo eléctrico los portadores de carga del conductor comienzan a moverse, redistribuyéndose las cargas eléctricas. Cuando esa corriente interna finaliza, y se alcanza el equilibrio electrostático, *el campo E en el interior del conductor es nulo.* Si el campo no fuera nulo en el interior del material, existirían fuerzas que producirían desplazamientos de cargas, y el conductor no estaría en equilibrio electrostático. El tiempo que emplean las cargas en redistribuirse, hasta que el campo en todo punto interior sea nulo, es muy pequeño y puede no ser considerado en la práctica.

Si el campo E en el interior de un conductor es nulo, el flujo eléctrico a través de cualquier superficie contenida en el conductor, también será nulo y de acuerdo con la ley de Gauss no habrá carga neta encerrada por dicha superficie. Si la carga no puede encontrarse en el interior del conductor, la única posibilidad es que se encuentre sobre la superficie. Estudios más detallados demuestran que las cargas de un conductor se encuentran hasta una distancia de la superficie del orden de una o dos veces el diámetro atómico.



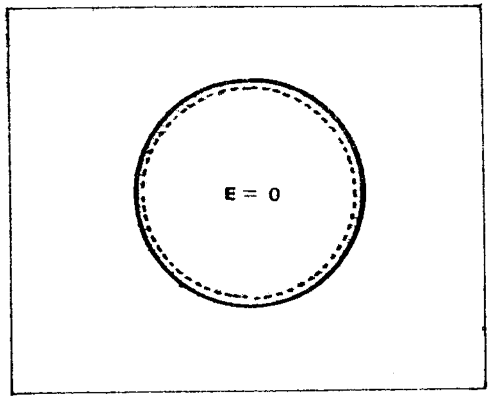



*Figura 3.16.* Las cargas en exceso que posea un conductor aislado se encuentran sobre la superficie.

*El campo eléctrico fuera de la superficie debe ser normal a la misma.* Si esto no fuera así, el campo tendría una componente en la dirección tangencial y los electrones se moverían sobre la superficie; en esas condiciones no se tendría un sistema con cargas estacionarias. Las líneas de fuerza, por lo tanto, salen o llegan a la superficie del conductor en dirección perpendicular a la misma.

Utilizando la ley de Gauss se puede relacionar la intensidad del campo eléctrico, en puntos próximos a la superficie del conductor, con la densidad superficial de carga $\sigma$ (carga por unidad de superficie). Considere como superficie gaussiana un pequeño cilindro con el eje perpendicular a la superficie y con una base en el exterior y otra en el interior del conductor. El flujo a través de la superficie lateral del cilindro es nulo, ya que el campo eléctrico, donde existe, es paralelo a dicha superficie. El flujo a través de la base del cilindro que se encuentra en el interior también es nulo, porque allí el campo es nulo. Finalmente, el flujo a través de la base exterior es $\Phi = E \cdot S$ y por Gauss $\Phi = q/\epsilon_0$, donde $q = \sigma S$. Entonces:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = ES$$

$$\frac{\sigma S}{\epsilon_0} = ES$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad (3\text{-}9)$$

Ninguna distribución de cargas estáticas en el exterior de un conductor puede producir campos en su interior. Esto proporciona un procedimiento de "blindaje" para equipos eléctricos. Colocando el equipo dentro de una caja metálica se logra que ninguna distribución de cargas estáticas en el exterior afecte el funcionamiento del equipo.

*Figura 3.17.* El campo eléctrico en la superficie del conductor es normal a ella.

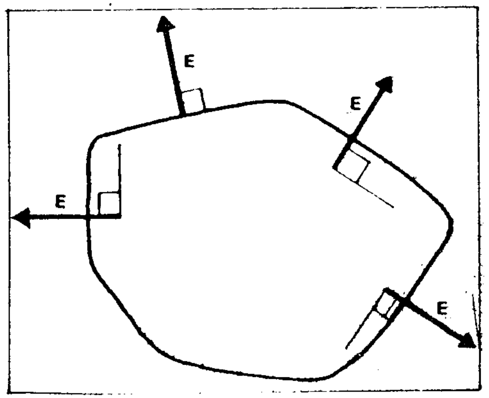
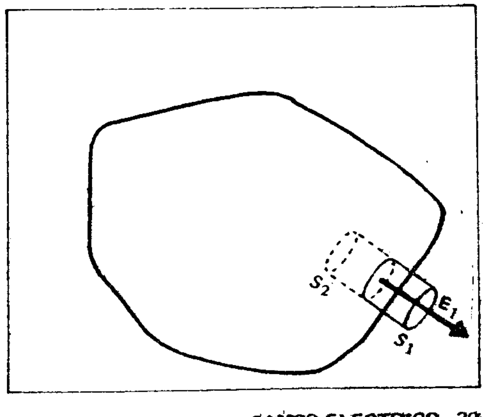



*Figura 3.18.* Superficie gaussiana utilizada para determinar el valor del campo eléctrico en el exterior del conductor.



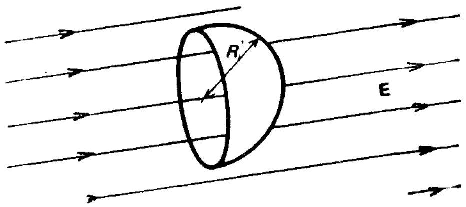
## 3. PROBLEMAS

1. Una carga eléctrica, $q = 5,0 \times 10^{-6}$ C, se encuentra en el centro de una esfera de 10 cm de radio. Calcule el flujo de campo eléctrico a través de la superficie de la esfera.

2. El flujo neto saliente a través de la superficie de un cubo es 9,0 $Nm^2/C$. Calcule la carga neta encerrada por el cubo de 5,0 cm de arista.

3. Un alambre recto muy largo, cargado uniformemente con densidad lineal de carga, $\lambda = 2,0 \times 10^{-8}$ C/m, atraviesa un cubo de 3,0 cm de arista, entrando y saliendo por el centro de dos caras opuestas. Determine el flujo de campo eléctrico a través de la superficie del cubo.

4. Una superficie semiesférica es colocada en una zona donde el campo eléctrico es uniforme. Determine el valor del flujo de campo eléctrico a través de la superficie de la semiesfera.



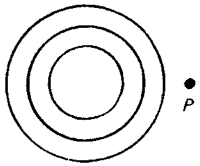

5. Un cascarón esférico de 10 cm de radio se carga con $10^{10}$ electrones. Determine el campo eléctrico que se crea a 15,0 cm del centro del cascarón.

6. Considere una esfera conductora de 10 cm de radio, con una carga de + 10 pC. Calcule: a) el flujo de campo eléctrico, a través de tres esferas concéntricas con la carga de 5,0 , 20 y 30 cm de radio
b) el campo eléctrico en un punto $P$ que se encuentra a 40 cm del centro de la esfera.

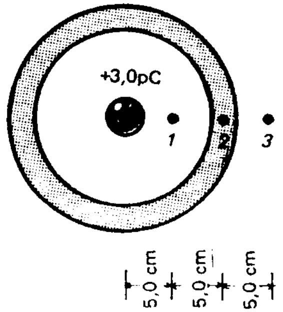
7. Una carga puntual de − 6,0 pC se encuentra ubicada en el centro de una esfera hueca conductora de 5,5 cm de radio y + 1,0 pC de carga. Determine el campo creado a 15 cm del centro de la esfera.

8. El campo eléctrico en la superficie de la Tierra tiene dirección radial, dirigido hacia afuera y vale 100 N/C. Determine la carga total de la Tierra suponiendo que se trata de una superficie conductora.

9. Considere tres esferas huecas concéntricas y cargadas de radios 5,0; 10,0 y 15,0 mm y cargas totales 50 pC, 100 pC y 150 pC respectivamente. Calcule el campo eléctrico en un punto $P$ que se encuentra a 5,0 mm de la superficie de la esfera exterior.

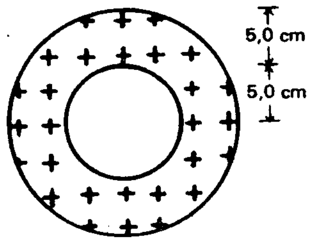



10. Una esfera no conductora de radio $R$ = 0,20 m está cargada uniformemente con una densidad volumétrica de carga $\rho = 10^{-6}$ C/m$^3$. Calcule:
a) el flujo de campo eléctrico a través de una superficie esférica, concéntrica con la esfera cargada y de radio 0,10 m.
b) el campo eléctrico en un punto ubicado a 10 cm del centro y en otro punto a 10 cm de la superficie de la esfera cargada.




11. Una carga puntual de + 3,0 pC se encuentra en el centro de un cascarón esférico neutro. Calcule el campo eléctrico en los puntos 1, 2 y 3 de la figura anterior suponiendo que el cascarón esférico está construido con:
a) material conductor.
b) material no conductor.

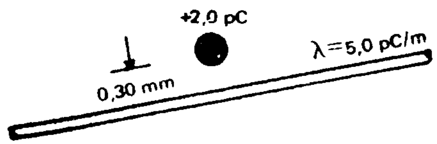
12. Un cascarón esférico de 10 cm de radio exterior y 5,0 cm de radio interior está construido con un material no conductor y tiene una distribución de carga uniforme $\rho = 2,0$ pC/m$^3$. Dibuje una gráfica del campo creado en función de la distancia al centro.




13. Considere dos esferas conductoras huecas y concéntricas de 5,0 cm y 10,0 cm de radio. Las esferas tienen una carga de + 5,0 pC cada una. Dibuje la gráfica del campo eléctrico en función de la distancia al centro de las esferas.

14. Resuelva el problema anterior suponiendo que las esferas están cargadas con + 2,0 pC y − 4,0 pC respectivamente.

15. Una carga de + 2,0 pC es colocada a 0,30 mm de una línea de carga muy larga, con densidad lineal de carga uniforme $\lambda$ = 5,0 pC/m. Calcular la fuerza que actúa sobre la carga.




16. Un cilindro macizo de radio 3,0 cm y longitud infinita está cargado uniformemente con densidad de carga $\rho = 3,0 \times 10^{-10}$ C/m$^3$. Determine el campo eléctrico en un punto $P$ que dista 2,0 cm del eje y en un punto $Q$ que dista 4,0 cm del eje.

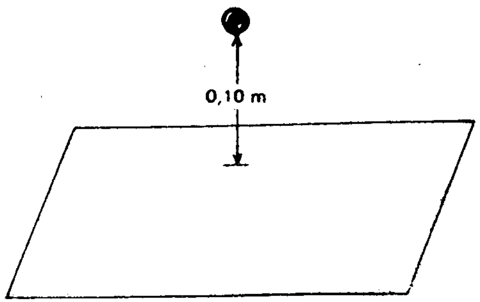
17. Un cilindro hueco de 3,0 cm de radio y longitud infinita, está cargado con densidad superficial de carga $\sigma = -2,0 \times 10^{-6}$ C/m$^2$. Determine el campo eléctrico en un punto $P$ que dista 2,0 cm del eje y en un punto $Q$ que dista 4,0 cm del eje.

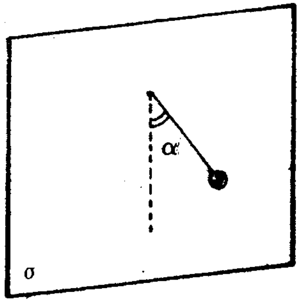
18. Dos alambres rectos, muy largos, se colocan paralelos a 2,0 cm de separación. La densidad de carga en cada uno de ellos es $+3,0 \times 10^{-8}$ C/m. Determine la fuerza ejercida sobre la unidad de longitud de uno de ellos por las cargas del otro.

19. Dos placas metálicas paralelas, de área 2,0 m$^2$ se encuentran separadas 3,0 cm. El campo eléctrico en la zona entre placas es 40 N/C. Determine la carga de cada placa.

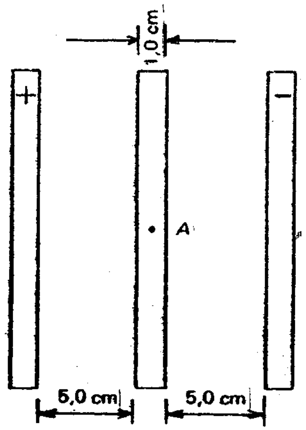
20. Un protón, que se encuentra inicialmente en reposo, es acelerado por acción del campo eléctrico creado por un plano infinito cargado uniformemente. El protón adquiere en 0,01 s una velocidad de $2,0 \times 10^4$ m/s. Determine la densidad superficial de carga que posee el plano.

21. Una bolita de 0,50 gramos de masa cargada con $5,0 \times 10^{-6}$ C se deja caer sobre un plano horizontal de 200 m$^2$ cargado uniformemente, con velocidad inicial de 0,90 m/s. Por acción del campo eléctrico la bolita se frena después de recorrer 0,10 m. Determine la carga del plano.






22. Una pequeña esfera de masa $m = 3{,}0 \times 10^{-3}$ kg, cargada con $1{,}5 \times 10^{-6}$ C, cuelga de un hilo aislante fijo por su extremo a una gran superficie vertical cargada uniformemente con $\sigma = 1{,}26 \times 10^{-7}$ C/m². Calcule el ángulo que forma el hilo con la superficie cuando se alcanza el equilibrio.




23. Tres placas metálicas muy grandes están separadas entre sí 5,0 cm. Las placas de los extremos tienen cargas de $+ 2{,}0$ nC/m² y $- 2{,}0$ nC/m². Calcule el campo eléctrico en el punto $A$ equidistante de las placas exteriores.



# 4. POTENCIAL ELECTRICO



## 4.1 TRABAJO ELECTRICO

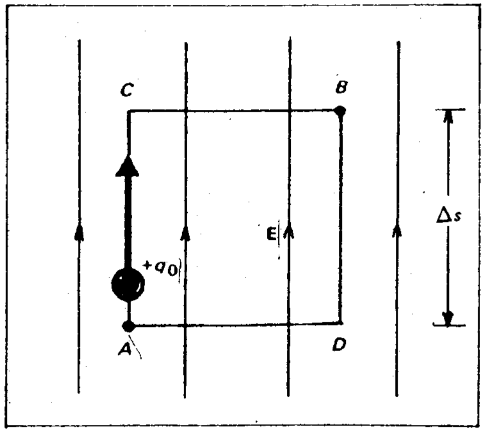
Cuando una carga se desplaza entre dos puntos, $A$ y $B$, de un campo eléctrico, las fuerzas del campo que actúan sobre ella realizan un trabajo $T_{AB}$. Se demostrará que este trabajo se caracteriza por tener el mismo valor cualquiera sea la trayectoria que une el punto $A$ con el punto $B$. Por eso, la fuerza del campo electrostático, igual que la fuerza gravitatoria y la fuerza elástica, es una *fuerza conservativa* lo que permitirá definir el *potencial eléctrico* en cada punto del campo. Observe que sobre la carga pueden actuar otras fuerzas que también realizan trabajo, pero en lo que sigue se prestará atención al trabajo de las fuerzas del campo electrostático solamente.

### TRABAJO REALIZADO POR UN CAMPO ELECTRICO UNIFORME

¿Qué trabajo realiza la fuerza del campo eléctrico, cuando una carga $+q_0$, pasa de una posición $A$ a una posición $B$, moviéndose en una zona donde existe un campo eléctrico uniforme? Se calculará ese trabajo estudiando distintas trayectorias que puede seguir la carga en su desplazamiento entre los puntos $A$ y $B$.

Si se considera el recorrido $ACB$ (figura 4.1), el trabajo total realizado sobre la carga es igual a la suma del trabajo realizado en el des-

*Figura 4.1.* El trabajo del campo eléctrico sobre la carga, es el mismo en el camino $ACB$ que en el $ADB$.



plazamiento $AC$ más el trabajo realizado en el desplazamiento $CB$. En el trayecto $AC$ el trabajo es:

$$T_{AC} = F \,.\, \Delta s \, \cos\phi =$$

$$= q_0 E \,.\, \Delta s \, \cos 0^\circ = q_0 E \Delta s$$

En el trayecto $CB$ el trabajo es nulo, porque la fuerza es perpendicular al desplazamiento

$$T_{CB} = F \,.\, \Delta s \, \cos\phi =$$

$$= q_0 E \,.\, \Delta s \, \cos 90^\circ = 0$$

Entonces, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre la carga cuando ésta sigue la trayectoria $ACB$ es:

$$T_{AB} = T_{AC} + T_{CB}$$

$$T_{AB} = q_0 E\Delta s + 0 = q_0 E \Delta s$$

Si se considera el recorrido $ADB$, en el trayecto $AD$ el trabajo es nulo por ser un desplazamiento perpendicular a la fuerza, $T_{AD} = 0$, y en el trayecto $DB$ el trabajo es:

$$T_{DB} = F \,.\, \Delta s \, \cos\phi = q_0 E \Delta s \, \cos 0^\circ =$$

$$= q_0 E \Delta s$$

Entonces:

$$T_{AB} = T_{AD} + T_{DB}$$

$$T_{AB} = 0 + q_0 \, E \Delta s = q_0 \, E \Delta s$$

Si se elige una trayectoria como la dibujada en la figura 4.2, el trabajo de las fuerzas eléctricas también se calcula fácilmente. En los desplazamientos $\Delta x$ paralelos al eje $x$, el trabajo de las fuerzas eléctricas es nulo porque el campo y el desplazamiento son perpendiculares. En los desplazamientos $\Delta y$ paralelos al eje $y$, el trabajo de la fuerza eléctrica es:

$$\Delta T = q_0 \, E \Delta y$$

Sumando el trabajo en todos esos tramos, queda el trabajo total:

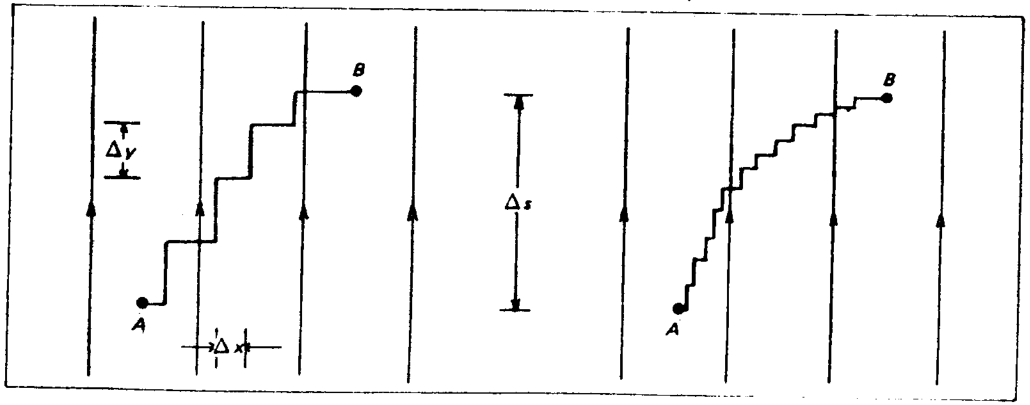
$$T_{AB} = \Sigma \, \Delta T = \Sigma \, q_0 \, E \Delta y =$$

$$= q_0 \, E \, \Sigma \, \Delta y = q_0 \, E \Delta s$$

Es evidente que se obtiene el mismo resultado con cualquier camino construido con un número arbitrario de tramos del mismo tipo.

Si la trayectoria fuera una curva cualquiera, que una los puntos $A$ y $B$ se deberá utilizar un número muy grande de desplazamientos ele-

*Figura 4.2.* Cuando la carga pasa del punto $A$ al punto $B$, el trabajo del campo eléctrico es el mismo cualquiera sea la trayectoria.





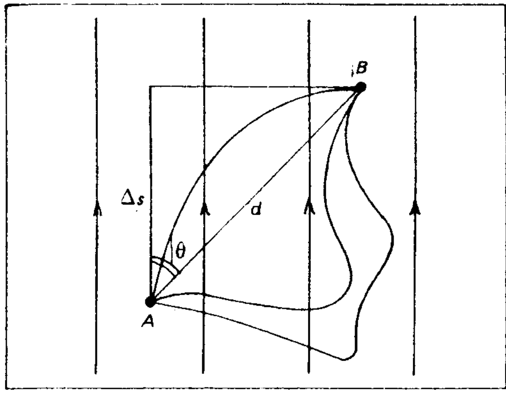




*Figura 4.3.* El trabajo del campo eléctrico, cuando la carga $q_0$ pasa del punto A al punto B, es $q_0 E\Delta s$ que también puede expresarse como $q_0 Ed \cos\phi$

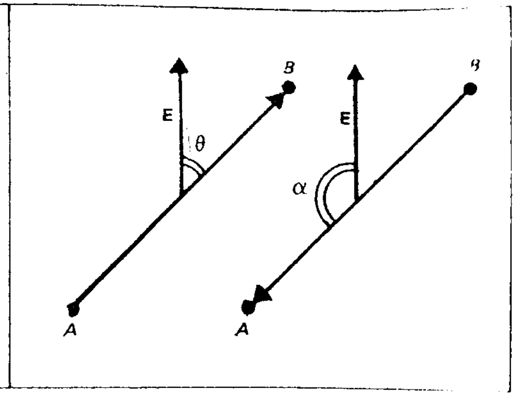



*Figura 4.4.* El trabajo del campo eléctrico sobre la carga en el viaje de ida entre $A$ y $B$ tiene el mismo valor pero signo contrario al trabajo del campo eléctrico sobre la carga en el viaje de regreso entre $B$ y $A$.

mentales de ese tipo, tan pequeños como sea necesario para que la trayectoria quebrada, así formada, se confunda con la trayectoria curva original; y en este caso el trabajo del campo sería el mismo que antes. En los desplazamientos horizontales el trabajo es nulo. El trabajo total realizado en los desplazamientos verticales es igual a la suma del trabajo realizado en cada uno de los desplazamientos $dy$

$$T_{AB} = \int_A^B q_0 \, E \, dy = q_0 \, E \, \Delta s$$

Cualquiera sea la trayectoria, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre una carga $q_0$, que se desplaza entre dos puntos $A$ y $B$ del campo $\mathbf{E}$ uniforme es

$$T_{AB} = q_0 \, E \, \Delta s \qquad (4\text{-}1)$$

En esa expresión, $\Delta s = d \cos\phi$, siendo $d$ la distancia entre los puntos $A$ y $B$ y $\phi$ el ángulo que forma el campo $\mathbf{E}$ con la dirección $\mathbf{AB}$. Entonces el trabajo que realiza la fuerza electrostática sobre la carga, cuando ésta se desplaza entre los puntos $A$ y $B$ puede expresarse, independientemente de la trayectoria, en función de la distancia $d$ que separa la posición inicial y final de la carga

$$T_{AB} = q_0 \, E \, d \cos\phi \qquad (4\text{-}2)$$

Cuando la carga regresa del punto $B$ al punto $A$, el trabajo del campo eléctrico tiene el mismo valor pero el signo contrario:

$$T_{BA} = q_0 \, E \, d \cos\alpha = - q_0 \, E \, d \cos\phi \qquad (4\text{-}3)$$

En efecto, en el viaje de regreso el ángulo $\alpha$ que forma el campo con el desplazamiento es suplementario del que forma en el viaje de ida (figura 4.4), y por lo tanto el cos $\alpha$ tiene el mismo valor absoluto que cos $\phi$ pero signo contrario.

$$T_{AB} = - T_{BA}$$

Por eso, en un viaje de ida y vuelta el trabajo realizado por la fuerza del campo electrostático es nulo. La fuerza del campo electrostático es una *fuerza conservativa.*

$$T_{AB} + T_{BA} = 0$$

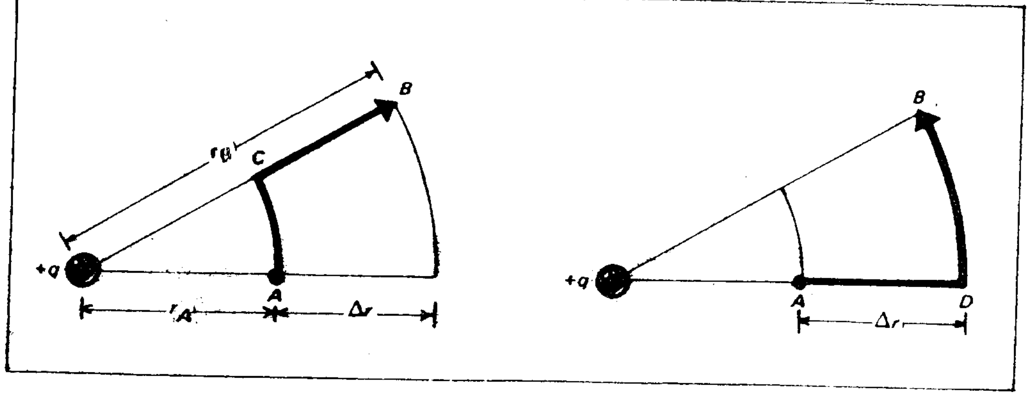
Como el trabajo realizado por la fuerza electrostática sobre una carga eléctrica es independiente del camino recorrido, *es imposible obtener energía de un campo electrostático.* Si El trabajo electrostático dependiera del camino, existiría la posibilidad de ir del punto $A$ al punto $B$ por un camino donde $T$ fuera pequeño, y regresar por otro donde $T$ fuera mayor. Se extraería del sistema más trabajo que el proporcionado y eso no es posible.

## TRABAJO REALIZADO POR EL CAMPO ELECTRICO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL

Cuando la carga se desplaza por una zona donde existe un campo eléctrico creado por una carga puntual (figura 4.5), el trabajo realizado por la fuerza electrostática también es independiente de la trayectoria. Fácilmente se demuestra que el trabajo realizado por el campo sobre la carga cuando ésta se desplaza desde $A$ hasta $B$ pasando por $C$, es igual al trabajo realizado sobre ella cuando se desplaza desde $A$ hasta $B$ pasando por $D$. En el trayecto $AC$ y en el $DB$ el trabajo es nulo ya que, por tratarse de desplazamientos que corresponden a arcos de circunferencias, el campo eléctrico (que tiene la dirección radial) es siempre perpendicular a esos desplazamientos. El trabajo realizado por la fuerza electrostática en el trayecto $CB$ es igual al realizado en el trayecto $AD$. (Recuerde que el campo en estos desplazamientos no es constante, a medida que aumenta la distancia a la carga, el campo disminuye). Para calcular ese trabajo Ud. debe descomponer el recorrido $\Delta r$ en pequeños desplazamientos y luego integrar a lo largo del trayecto $\Delta r$. Según se calcula en el recuadro de la página 47, ese trabajo es

$$T_{AB} = k\,q\,q_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \qquad (4\text{-}4)$$

Figura 4.5. El trabajo del campo eléctrico sobre una carga, es el mismo en el camino $ACB$, que en el $ADB$.




o sea el mismo para los desplazamientos $CB$ y $AD$.

Si se elige una trayectoria como la dibujada en la figura 4.6, el trabajo de las fuerzas eléctricas también se calcula fácilmente. En los desplazamientos que corresponden a arcos de circunferencia el trabajo es nulo, pues estos desplazamientos son perpendiculares al campo. En las direcciones radiales el trabajo se calcula por partes y después se suma

$$T_{A1} = k\,q\,q_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$T_{2,3} = k\,q\,q_0\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$

$$T_{4,5} = k\,q\,q_0\left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5}\right)$$

$$T_{6,B} = k\,q\,q_0\left(\frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Al sumar todos esos trabajos queda:

$$T_{AB} =$$

$$= k\,q\,q_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Como $r_1 = r_2, r_3 = r_4, r_5 = r_6$,

$$T_{AB} = k\,q\,q_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$



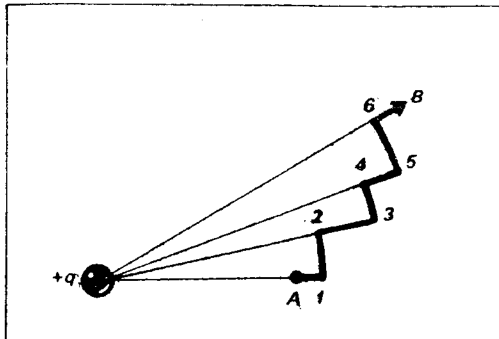



*Figura 4.6.* Cuando la carga pasa del punto $A$ al punto $B$, el trabajo del campo eléctrico es el mismo cualquiera sea la trayectoria

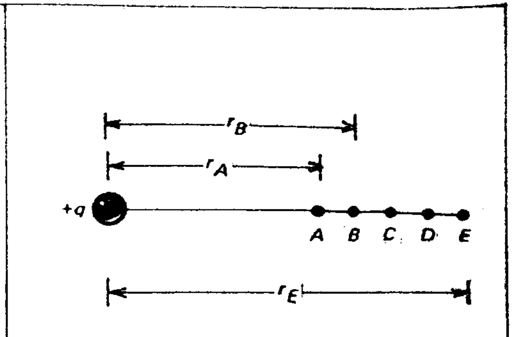



*Figura 4.7.* La fuerza eléctrica varía, cuando varía la distancia entre las cargas.

### CALCULO DEL TRABAJO DE LA FUERZA DEL CAMPO ELECTRICO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL

Suponga que una carga de prueba $+q_0$ pasa del punto $A$ a un punto $B$ muy cercano (figura 4.7), moviéndose según una dirección radial en el campo eléctrico creado por una carga puntual $+q$. La fuerza eléctrica varía cuando varía la distancia que separa a las cargas $q_0$ y $q$. Cuando la carga de prueba está en $A$, la fuerza es $kqq_0/r_A^2$ y cuando está en $B$, la fuerza es $kqq_0/r_B^2$. Como los puntos son muy cercanos, las distancias $r_A$ y $r_B$ son muy parecidas y por lo tanto las fuerzas de interacción son prácticamente iguales. Se puede considerar entonces, sin cometer mayor error, que la fuerza que actúa en el trayecto $AB$ es $kqq_0/r_Ar_B$. El trabajo de esa fuerza eléctrica sobre la carga $q_0$ en el desplazamiento $AB$ es:

$$T_{AB} = F\,.\,\Delta r$$

$$T_{AB} = \left(\frac{kqq_0}{r_A r_B}\right)(r_B - r_A) =$$

$$= kqq_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

$$T_{AB} = kqq_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Si la carga después se desplaza hasta el punto $E$, pasando por los puntos $C$ y $D$, el trabajo del campo es igual a la suma de los trabajos elementales en cada desplazamiento entre dos puntos consecutivos.

$$T_{AE} =$$

$$= kqq_0\left[\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) + \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right) + \left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_D}\right) + \left(\frac{1}{r_D} - \frac{1}{r_E}\right)\right]$$

Observe que se eliminan todos los términos, excepto el primero y el último. Entonces el trabajo del campo, cuando la carga pasa de la posición inicial a la posición final, puede escribirse siempre, en función de la separación inicial y final de las cargas

$$T_{AE} = kqq_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_E}\right)$$

A este mismo resultado se llega aplicando directamente el cálculo integral. En efecto:

$$T_{AE} = \int_A^E F\,.dr = \int_A^E \frac{kqq_0}{r^2}\,dr =$$

$$= kqq_0\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_E}\right)$$

La misma solución se encuentra con cualquier camino construido con un número cualquiera de tramos de este mismo tipo. También se encuentra esa solución si la trayectoria es una curva cualquiera; Ud. la puede descomponer imaginariamente en pequeños desplazamientos radiales y circulares, tan pequeños como sea necesario para que esta trayectoria quebrada no se diferencie de la trayectoria original. En los desplazamientos circulares el trabajo es nulo. El trabajo total realizado en los desplazamientos radiales es igual a la suma del trabajo realizado en cada uno de los desplazamientos $dr$.

$$T_{AB} = \int_{r_B}^{r_A} F\,dr = kqq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

En conclusión, el trabajo realizado por la fuerza electrostática sobre una carga es independiente de la trayectoria, depende únicamente de la posición inicial y de la posición final. *La fuerza electrostática es una fuerza conservativa.*

**Más adelante se estudiarán campos eléctricos que no son creados por distribuciones de carga en reposo. En esos casos las fuerzas del campo eléctrico no son conservativas.**

## 4.2 POTENCIAL ELECTRICO

Para calcular el trabajo realizado por la fuerza *electrostática* sobre una carga no hay que considerar su trayectoria, alcanza con tener en cuenta su posición inicial y su posición final. Por eso, el trabajo eléctrico se puede representar como la diferencia entre dos valores asociados a la posición inicial y a la posición final de la carga.

Considere un punto $P$ de referencia y llame $V_1$ al trabajo por unidad de carga, realizado por la fuerza eléctrica, cuando la carga pasa del punto *1* al punto $P$; $V_2$ al trabajo por unidad de carga realizado por la fuerza eléctrica cuando la carga pasa del punto *2* al punto $P$. El trabajo por unidad de carga cuando la carga pasa del punto $P$ al punto *2* será entonces $-V_2$. El trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre una carga $q_0$, que pasa del punto *1* al punto *2*, es independiente de la trayectoria. Se puede elegir una trayectoria que pase por el punto $P$, entonces:

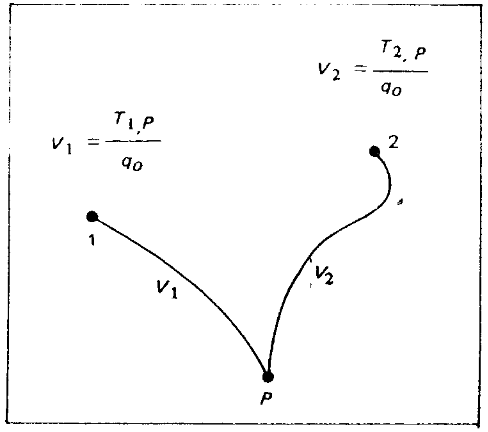



*Figura 4.8.* El trabajo por unidad de carga, realizado por el campo eléctrico cuando la carga pasa del punto 1 al 2 es $V_1 - V_2$.

$$T_{1,2} = T_{1,P} + T_{P,2}$$

$$\frac{T_{1,2}}{q_0} = \frac{T_{1,P}}{q_0} + \frac{T_{P,2}}{q_0}$$

$$\frac{T_{1,2}}{q_0} = V_1 - V_2 \qquad (4\text{-}5)$$

Como $\Delta V = V_2 - V_1$, ya que la posición final corresponde al punto *2* y la posición inicial al punto *1*, puede escribirse:

$$\frac{T_{1,2}}{q_0} = -\Delta V \qquad (4\text{-}6)$$



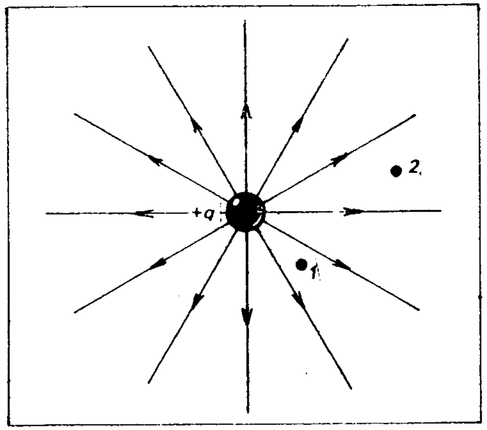



*Figura 4.9.* Cuando la carga de prueba pasa del punto 1 al punto 2, el potencial disminuye porque el trabajo del campo es positivo.

Si el campo realiza un trabajo positivo sobre la carga de prueba, cuando ésta pasa del punto *1* al punto *2*, la diferencia de potencial $\Delta V$ será negativa, lo que implica que el potencial eléctrico en el punto *1* es mayor que en el punto *2*. Un trabajo negativo del campo eléctrico cuando la carga pasa del punto *1* al punto *2* significa que el potencial eléctrico en el punto *1* es menor que en el punto *2*. Si los dos puntos se encuentran al mismo potencial, $V_1 = V_2$, el trabajo realizado por el campo eléctrico cuando la carga pasa de uno de esos puntos al otro es nulo.

Si se toma otro punto $P'$ de referencia, los valores $V'_1$ y $V'_2$ serán distintos. Pero la diferencia $V'_2 - V'_1$ permanece constante, puesto que representa el trabajo del campo por unidad de carga, y ese trabajo es el mismo cuando la trayectoria pasa por $P$ o por $P'$ ya que solo depende de las posiciones inicial y final. Una vez elegido el punto de referencia, queda determinado el valor de $V$ para cada punto; y como $T$ y $q_0$ son magnitudes escalares, $V$ es un *campo escalar* que se llama *potencial eléctrico.*

*La diferencia de potencial entre dos puntos* viene dada por el trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático, cuando una carga unitaria y positiva se desplaza del primer punto al segundo.

$$\frac{T_{1,2}}{q_0} = V_1 - V_2$$

**En muchos casos (cuando la distribución de cargas no es infinita), se elige como punto de referencia $P$, un punto en el infinito (alcanza con considerar un punto muy alejado donde el campo sea despreciable), y se asigna al potencial en esa posición el valor cero $V_P = 0$. Entonces:**

$$\frac{T_{NP}}{q_0} = V_N - V_P$$

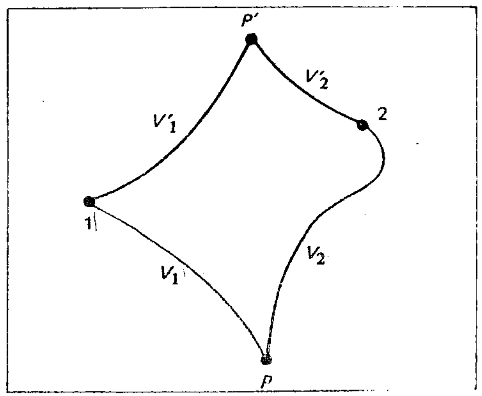
**como $V_P = 0$ queda**

$$V_N = \frac{T_{N,\infty}}{q_0} \qquad (4\text{-}7)$$

el potencial eléctrico en el punto $N$, puede interpretarse como el trabajo que realiza el campo eléctrico sobre una carga cuando ésta pasa del punto $N$ a una posición ubicada en el infinito.

La descripción de las propiedades que se manifiestan en el espacio que rodea a una carga, puede realizarse indistintamente utilizando el campo eléctrico $\mathbf{E}$ o el potencial eléctrico $V$. El potencial eléctrico es una magnitud escalar mientras que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ es vectorial. Por ello es más simple trabajar con el potencial $V$ que con el campo $\mathbf{E}$. En la página 55 se verá la relación entre ellos.

*Figura 4.10.* La diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 es independiente de la posición del punto de referencia $P$.



## UNIDADES

Para medir la diferencia de potencial, en el Sistema Internacional se utiliza el *volt (V)*.

$$1\ volt = \frac{1\ joule}{1\ coulomb}$$

**Entre dos puntos hay una diferencia de potencial de 1 volt, cuando al desplazar entre ellos una carga de 1 coulomb, el campo eléctrico realiza sobre la carga un trabajo de 1 joule.**

**EJEMPLO 1**

*Un electrón se mueve libremente, sometido exclusivamente a las fuerzas de un campo electrostático. En el punto A su velocidad es 3,0 x $10^5$ m/s, llega al punto B con una velocidad de 5,0 x $10^5$ m/s. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos A y B.*

Por acción de este campo eléctrico, el electrón gana energía cinética, entonces el trabajo del campo eléctrico, cuando el electrón pasa del punto $A$ al punto $B$ es positivo; la variación del potencial es negativa y por lo tanto el potencial eléctrico en $B$ es menor que en $A$.

$$\frac{T_{AB}}{q_0} = V_A - V_B$$

El trabajo del campo eléctrico es igual a la variación de la energía cinética $\Delta K$

$$K_o = ½\, mv_o^2 = ½(9{,}1 \times 10^{-31})(3{,}0 \times 10^5)^2$$

$$K_f = ½ mv_f^2 = ½(9{,}1 \times 10^{-31})(5{,}0 \times 10^5)^2$$

$$T = \Delta K = K_f - K_o =$$

$$(11{,}3 \times 10^{-20}) - (4{,}09 \times 10^{-20}) = 7{,}28 \times 10^{-20}$$

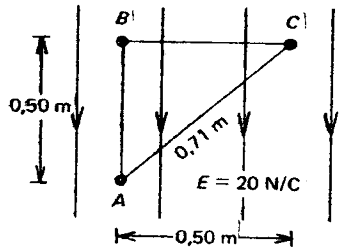
$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{T_{AB}}{q_0} =$$

$$= -\frac{7{,}28 \times 10^{-20}\ J}{1{,}6 \times 10^{-19}\ C} = -0{,}45\ V$$

Lo que le ocurre al electrón de este ejemplo, es similar a lo que le ocurre a una piedra que cae libremente en el campo gravitatorio, aumenta su energía cinética disminuyendo el potencial gravitatorio.

**EJEMPLO 2**

*Los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo rectángulo, y se encuentran en una zona donde existe un campo eléctrico uniforme de intensidad E = 20 N/C. Determine las diferencias de potencial entre los puntos A y B, A y C, B y C.*




La diferencia de potencial entre dos puntos es:

$$V_1 - V_2 = \frac{T_{1,2}}{q_0} = \frac{E\, q_0\, d \cos\theta}{q_0} =$$

$$= E\, d \cos\theta$$

donde $\theta$ es el ángulo que forma el vector que une los puntos con el campo **E**.

a) puntos $A$ y $B$

$$V_B - V_A = E\,d = 20 \times 0{,}50 = 10\ V$$

b) puntos $A$ y $C$

$$V_C - V_A = E\, d \cos 45^\circ =$$

$$= 20 \times 0{,}71 \times 0{,}71 = 10\ V$$

c) puntos $B$ y $C$

$$V_B - V_C = E\, d \cos 90^\circ = 0$$

los puntos $B$ y $C$ se encuentran sobre la misma superficie equipotencial.



## POTENCIAL DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

La diferencia de potencial entre dos puntos $A$ y $B$ de un campo creado por una carga puntual es:

$$\frac{T_{AB}}{q_0} = V_A - V_B$$

Donde el trabajo $T_{AB}$, que realiza el campo eléctrico sobre la carga $q_o$, cuando ésta pasa de $A$ hasta $B$, es, según lo calculado en la página 46.

$$T_{AB} = k\, q\, q_0 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

entonces la diferencia de potencial entre $A$ y $B$ es

$$V_A - V_B = k\, q \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Si se toma el punto de referencia, $B$, en el infinito ($r_B \Rightarrow \infty$; $1/r_B \Rightarrow 0$) y considerando nulo el potencial eléctrico allí ($V_B = 0$), queda:

$$V_A = \frac{k\,q}{r_A}$$

En general, el potencial eléctrico a una distancia $r$ de una carga puntual es:

$$V = \frac{k\,q}{r} \qquad (4\text{-}8)$$

Todos los puntos que se encuentran a la misma distancia $r$ de la carga $q$ tienen el mismo potencial. El potencial de una carga puntual positiva es positivo, eso implica que cuando una carga de prueba pasa de un punto del campo hasta el infinito (donde el campo eléctrico es despreciable), el campo eléctrico realiza sobre ella un trabajo positivo, comunicándole energía (la fuerza eléctrica y el desplazamiento están dirigidos en el mismo sentido). El potencial de una carga puntual negativa es negativo, eso implica que cuando una carga de prueba pasa de un punto del campo hasta el infinito, el campo eléctrico realiza sobre ella un trabajo negativo quitándole energía (la fuerza eléctrica y el desplazamiento en ese caso tienen sentidos opuestos)

## POTENCIAL DEBIDO A VARIAS CARGAS

Considere un sistema de cargas $q_1, q_2, \ldots q_n$ y una carga de prueba $q_0$, que se desplaza en el campo de este sistema, desde un punto $A$ hasta un punto muy alejado (en teoría en el infinito). La fuerza **F** que actúa sobre $q_0$ es la resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ con que actúa cada una de las cargas del sistema. El trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}_1$ sobre la carga $q_0$, cuando ésta se desplaza desde $A$ hacia el infinito es

$$T(1) = q_0\, V(1)$$

donde $V(1)$ es el potencial eléctrico en el punto $A$ debido a la carga $q_1$. El trabajo realizado por las otras cargas es:

$$T(2) = q_0\, V(2), \ldots, T(n) = q_0\, V(n)$$

El trabajo resultante realizado sobre la carga $q_0$ es.

$$T(R) = T(1) + T(2) + \ldots + T(n)$$

$$T(R) = q_0\, V(1) + q_0\, V(2) + \ldots + q_0\, V(n)$$

$$T(R) = q_0\, [V(1) + V(2) + \ldots + V(n)]$$

*El potencial eléctrico en un punto, debido a varias cargas puntuales, se obtiene sumando escalarmente los diferentes potenciales eléctricos en el punto, creados por las distintas cargas.*

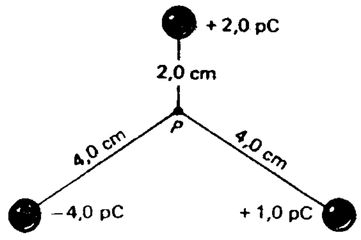
$$V(R) = V(1) + V(2) + \ldots + V(n)$$

$$V(R) = \Sigma\ V(i) = \Sigma k \frac{q_i}{r_i} = k \Sigma \frac{q_i}{r_i} \qquad (4\text{-}9)$$

Cualquier distribución continua de cargas puede considerarse formada por infinitas cargas elementales, cada una de las cuales realizará su aporte al potencial eléctrico.

**EJEMPLO 3**

*Calcular el potencial eléctrico en el punto P creado por las tres cargas puntuales de la figura.*




$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2} + k\frac{q_3}{r_3}$$

$$V = k\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right)$$

$$V \quad 9{,}0 \times 10^{9} \left(\frac{1{,}0 \times 10^{-12}}{4{,}0 \times 10^{-2}} + \frac{2{,}0 \times 10^{-12}}{2{,}0 \times 10^{-2}} + \frac{4{,}0 \times 10^{-12}}{4{,}0 \times 10^{-2}}\right)$$

$$V = 9.0 \times 10^{-3}\ (25 + 100 - 100) = 0{,}225\ \text{V}$$

## 4.3 POTENCIAL Y CAMPO

Considere una carga $q_0$, que se mueve entre el punto $A$ y el punto $B$, en un campo eléctrico uniforme (figura 4.11). La fuerza eléctrica que actúa sobre la carga es $\mathbf{F} = q_0\ \mathbf{E}$; y el trabajo realizado por esa fuerza en el desplazamiento de $A$ hacia $B$ es $T_{AB} = q_0 E \Delta s$.

*La diferencia de potencial entre los puntos A y B puede obtenerse a partir del campo eléctrico:*

$$V_A - V_B = \frac{T_{AB}}{q_0}$$

$$V_A - V_B = \frac{q_0 E \Delta s}{q_0} = E\Delta s$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -(V_A - V_B)$$

$$\Delta V = -E\Delta s \qquad (4\text{-}10)$$

El punto $A$ tiene un potencial mayor que el punto $B$, porque el trabajo realizado por el campo sobre la carga cuando ésta pasa del punto $A$ al punto $B$ es positivo. La carga obtiene energía a expensas del campo en ese desplazamiento.

Puede obtenerse una relación más general que la anterior, para el caso en que el campo no sea uniforme y la trayectoria de la carga entre los puntos $A$ y $B$ no sea rectilínea (figura 4.12) En este caso el campo varía de una posición a otra, en intensidad y en dirección. Para calcular el trabajo realizado por el campo entre $A$ y $B$, se debe descomponer la trayectoria en desplazamientos elementales $ds$, rectilíneos y tan pequeños como sea necesario para que en ellos el campo permanezca constante. El trabajo del campo sobre la carga $q_0$ en cada desplazamiento $ds$ es:

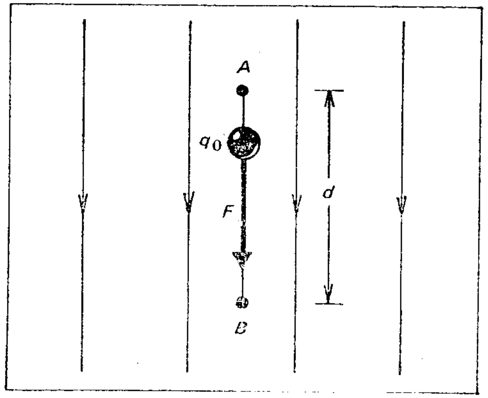



*Figura 4.11.* La diferencia de potencial entre dos puntos puede obtenerse a partir del campo eléctrico.

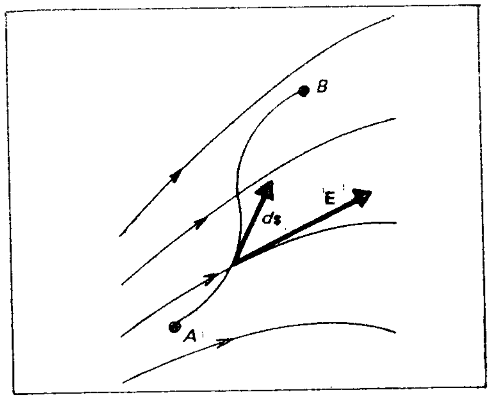



*Figura 4.12.* Trabajo de un campo eléctrico no uniforme.

$$dT = q_0\ E\ ds \cos\phi$$

donde $E \cos\phi$ es la componente del campo según la dirección tangente a la trayectoria; denominando $E_t$ a esa componente, queda:

$$dT = q_0\ E_t\ ds$$

El trabajo entre los puntos $A$ y $B$ se halla integrando todos los aportes elementales $dT$

$$T_{AB} = \int_A^B dT = \int_A^B q_0\ E_t\ ds$$

La diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$ es el trabajo del campo por unidad de carga

$$V_A - V_B = \frac{T_{AB}}{q_0} = \int_A^B E_t\, ds$$

Si la trayectoria fuera cerrada $V_A = V_B$, y entonces

$$\oint E_t\, ds = 0 \qquad (4\text{-}11)$$

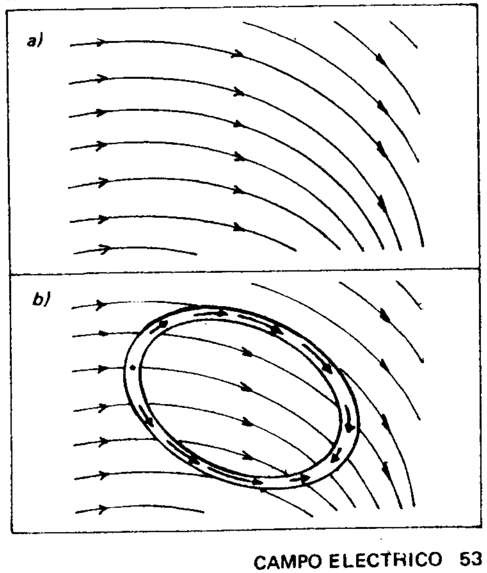
donde la integración se extiende a toda la trayectoria cerrada. Esta última integral se denomina *circulación de campo eléctrico.* Cuando el campo es debido a cargas en reposo, la circulación a lo largo de una línea cerrada es nula. Si el campo no fuera debido a cargas en reposo, las fuerzas de campo no serían conservativas y la circulación a lo largo de una línea cerrada no sería nula.

## 4.4 CIRCULACION DE CAMPO ELECTRICO

La *circulación* ($\mathfrak{C}$) de un vector a lo largo de una línea cerrada es una propiedad matemática de los campos vectoriales, que admite una interpretación física.

Considere primero un campo de velocidades que describa el flujo de un líquido (figura 4.13.a) ¿Está circulando ese líquido? o sea ¿hay algún movimiento rotacional resultante a lo largo de algún lazo? Para contestar esta pregunta, suponga que en un instante dado se congele todo el líquido excepto el que se encuentra dentro de un tubo cerrado de sección uniforme (figura 4.13.b). Fuera del tubo el movimiento del líquido cesó, pero en el interior continúa, debido a que su cantidad de movimiento en un sentido es mayor que en el otro. Se define la circulación del líquido como el producto de la

*Figura 4.13.* a) Campo de velocidades que describe el flujo de un líquido; b) Circulación a lo largo de una línea.



velocidad resultante en el tubo por la longitud del lazo. Esta definición da un número que es proporcional a la velocidad con que circula el líquido en el tubo considerado.

La definición de circulación se extiende a cualquier campo vectorial, aunque no haya nada material que se mueva. **La circulación a lo largo de una curva cerrada imaginaria cualquiera es el producto de la componente tangencial del vector por la longitud del lazo.**

*circulación = (componente tangencial) x (longitud del lazo)*

Cuando el campo no es uniforme, la línea debe dividirse en segmentos elementales rectilíneos $ds$, tales que el campo en ellos no experimente variaciones apreciables; se multiplica la longitud del segmento por la componente del campo en la dirección del segmento (componente tangencial del vector) y luego se suman todos los productos. La circulación de campo eléctrico es:

$$\mathfrak{C}_E = \oint E_t\, ds = \oint E\, ds \cos\alpha$$

puede expresarse también a partir del producto escalar entre los vectores E y ds.

$$\mathfrak{C}_E = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \qquad (4\text{-}12)$$

(El redondel en la integral de línea indica que ésta es cerrada). Según se vio en la página 53, en el campo electrostático, cualquiera sea la línea considerada $\oint E_t \cdot ds = 0$ La circulación del campo electrostático a lo largo de una línea cerrada es nula. El campo donde esto ocurre admite la definición del potencial porque la fuerza del campo es conservativa.

## 4.5 EQUIPOTENCIALES

Se ha definido, para cada punto de un campo electrostático, un valor para el potencial eléctrico. Este varía de un punto a otro; sin embargo, puede determinarse un conjunto de puntos con igual potencial. El lugar geométrico de los puntos de igual potencial eléctrico se llama *superficie equipotencial*. Cuando una carga eléctrica se desplaza por una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza trabajo sobre ella.

$$\text{Como } \frac{T_{1,2}}{q_0} = V_1 - V_2$$

si $V_1 = V_2$ puede deducirse que $T_{1,2} = 0$

El campo eléctrico es siempre *perpendicular* a la superficie equipotencial, si no lo fuera tendría una componente en la dirección de la superficie, y esa componente realizaría trabajo cuando el cuerpo se desplaza por la superficie, lo que no puede ocurrir de acuerdo a lo indicado antes. Por otra parte, si los puntos *1* y *2* pertenecen a la misma superficie equipotencial el trabajo $T_{1,2}$ es nulo y, como $T_{1,2} = q_0\, E\, d \cos\phi$, se deduce que $\cos\phi = 0$, de donde $\phi = 90°$, lo que indica que el campo es perpendicular a la superficie equipotencial.

Las superficies equipotenciales *no se cruzan* nunca; como el campo eléctrico es perpendicular a ellas, en el cruce de las equipotenciales el campo sería perpendicular a dos superficies simultáneamente, lo que no puede ocurrir.

Las superficies equipotenciales correspondientes a una carga puntual, son esferas concéntricas con la carga. En efecto, el potencial de una carga puntual es:

$$V = k\,\frac{q}{r}$$

por lo tanto los puntos que tengan el mismo potencial $V$ tendrán el mismo valor para la distancia $r$; y el lugar geométrico de los puntos que cumplen con esa condición es la superficie de una esfera de radio $r$. Observe que esa superficie es perpendicular a las líneas de campo (figura 4.14). Si la carga puntual que crea el campo es positiva el potencial disminuirá con el aumento de la distancia $r$, porque el trabajo que realiza el campo sobre una carga de prueba que se aleja es positivo. Si la carga puntual es negativa, cuando la carga de prueba positiva se aleja del origen del campo, el trabajo de la fuerza eléctrica es negativo; entonces el valor del potencial de las superficies equipotenciales aumentará a medida que aumente la distancia $r$ (como el potencial en este caso es negativo, disminuirá su valor absoluto).

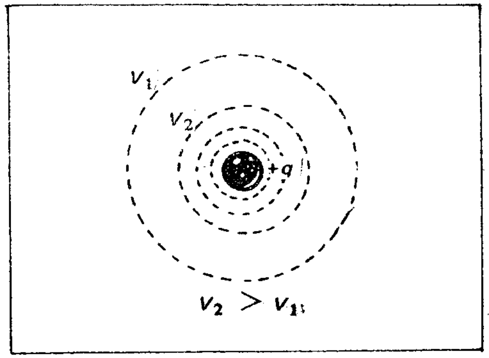
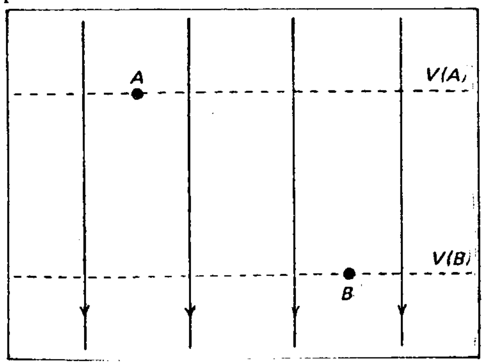



*Figura 4.14.* Las superficies equipotenciales correspondientes a una carga puntual son esferas concéntricas.

Para un campo eléctrico uniforme, las superficies equipotenciales son superficies paralelas entre sí y perpendiculares al campo. Cuando una carga de prueba pasa del punto $A$ al punto $B$ en el campo de la figura 4.15, el trabajo realizado por la fuerza del campo es positivo. Entonces el potencial en $A$ es mayor que el potencial en $B$. *Cuando el desplazamiento tiene el sentido en que apunta el campo, el potencial eléctrico decrece.*

*Figura 4.15.* Las superficies equipotenciales correspondientes a un campo eléctrico uniforme son superficies paralelas entre sí.




## 4.6 DETERMINACION DEL CAMPO E A PARTIR DEL POTENCIAL V

Como E y $V$ son descripciones equivalentes de las mismas propiedades, puede obtenerse información de E a partir de $V$ o viceversa. Cuando la carga $q_0$ se desplaza entre las posiciones $A$ y $B$, el trabajo realizado por la fuerza del campo eléctrico uniforme de la figura 4.16 es:

$$T_{AB} = q_0\, E\, d \cos\theta$$

y como $d \cos\theta = \Delta s$, siendo $\Delta s$ la distancia que separa a las superficies equipotenciales $V_A$ y $V_B$.

$$T_{AB} = q_0\, E\, \Delta s \qquad (4\text{-}13)$$

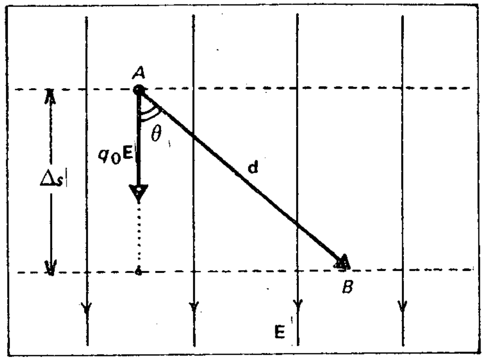



*Figura 4.16.* El campo eléctrico en un punto, puede determinarse a partir del potencial.

Observe que para calcular el trabajo lo que influye es la separación entre equipotenciales, porque el desplazamiento entre puntos que pertenezcan a la misma equipotencial es nulo.

El trabajo eléctrico puede expresarse también en función de la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$.

$$\frac{T_{AB}}{q_0} = V_A - V_B$$

$$\frac{T_{AB}}{q_0} = -(V_B - V_A) = -\Delta V$$

$$T_{AB} = -q_0\, \Delta V \qquad (4\text{-}14)$$

relacionando la ecuación 4.14 con la ecuación 4.13, queda:

$$q_0 \, E \, \Delta s = -q_0 \, \Delta V$$

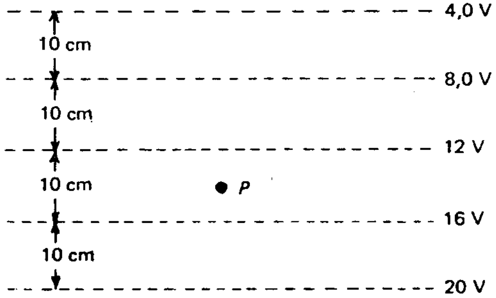
$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} \qquad (4\text{-}15)$$

**Las unidades de campo E pueden expresarse en volt/metro, que se puede demostrar es idéntico a N/C.**

*El campo eléctrico apunta en la dirección en que el potencial decrece* (*E* es positivo cuando $\Delta V$ es negativo). La distancia $\Delta s$ que aparece en la expresión anterior es la distancia entre superficies equipotenciales medida según una dirección perpendicular a ellas. Cuando las superficies están muy juntas, el campo **E** es muy intenso y viceversa.

### EJEMPLO 4

*La figura siguiente muestra las equipotenciales que describen un campo eléctrico uniforme. Determine el vector E en el punto P.*




El campo **E** es perpendicular a las superficies equipotenciales, dirigido hacia arriba, donde el potencial es menor, y su intensidad es:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s} = -\frac{-4{,}0}{0{,}010} = 4{,}0 \times 10^2 \text{ V/m}$$

## 4.7 GRADIENTE DE POTENCIAL

Según se vio antes, la intensidad del campo eléctrico es igual a la variación del potencial por unidad de longitud en dirección perpendicular a la superficie equipotencial.

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$$

La expresión $\Delta V/\Delta s$ se llama *gradiente del potencial eléctrico* e indica la rapidez con que varía el potencial en la medida que se produce un desplazamiento en la dirección perpendicular a las superficies equipotenciales. Observe que si se avanza en una dirección que no sea perpendicular a las superficies equipotenciales, el cociente $\Delta V/\Delta s$ daría un valor menor (figura 4 17). El valor máximo del cociente $\Delta V/\Delta s$ es el gradiente del potencial, y se obtiene cuando se calcula en la dirección del campo **E**

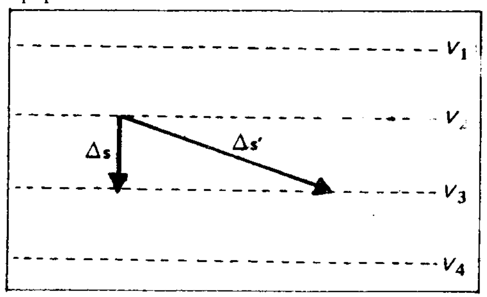
*El campo eléctrico es el gradiente del potencial eléctrico con el signo contrario.*

$$\mathbf{E} = -\text{ grad } V \qquad (4\text{-}16)$$

el signo menos indica el sentido del vector **E**, que apunta hacia donde el potencial disminuye. La relación anterior permite definir un vector **E** partiendo de un escalar *V*.

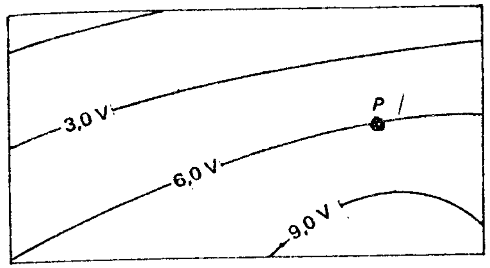
Cuando el campo **E** no es constante, los desplazamientos considerados deben ser infinitesimales y el campo eléctrico en un punto es $\mathbf{E} = -dV/ds$, donde el gradiente queda $dV/ds$.

*Figura 4.17.* El máximo valor del cociente $\Delta V/\Delta s$ se halla para la dirección perpendicular a las superficies equipotenciales.



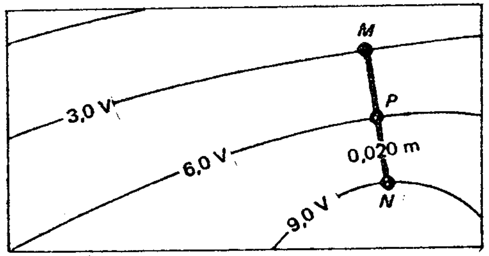

### EJEMPLO 5

*Los equipotenciales de la figura describen un campo eléctrico. En el dibujo se han utilizado las dimensiones reales. Determine el campo eléctrico en el punto P*

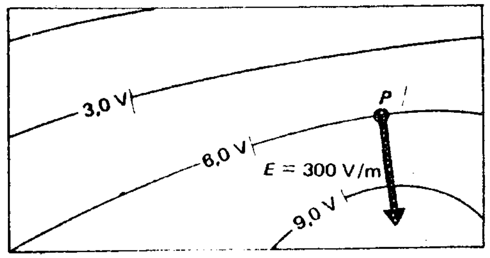



El gradiente de potencial en el punto *P*, tiene la dirección en que la separación entre las superficies equipotenciales es mínima, esa dirección debe ser además, perpendicular a las superficies. Realizando medidas en la figura puede determinarse que el gradiente de potencial eléctrico en el punto *P* tiene la dirección *MN* y su valor medio es:

$$\frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{6{,}0}{0{,}020} = 3{,}0 \times 10^2 \text{ V/m}$$



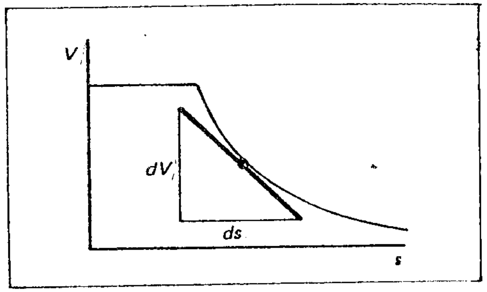

**El vector E tiene esa intensidad, dirección *MN* y el sentido de *P* hacia *N*, porque E apunta hacia donde decrece el potencial.**




## RELACION ENTRE LAS GRAFICAS DEL CAMPO Y EL POTENCIAL

Como exista una equivalencia entre el valor en cada punto, del potencial eléctrico *V* y del campo eléctrico **E**, las gráficas del *potencial en función de la posición* y del *módulo del campo eléctrico en función de la posición* están relacionadas y puede realizarse el pasaje de una a otra. En efecto, como $E = -dV/ds$, la *pendiente* en la gráfica $V - s$ representa, con el signo cambiado, la intensidad del campo eléctrico.

*Figura 4.18.* La pendiente en la gráfica $V$ - $s$ representa, con el signo cambiado, la intensidad del campo eléctrico.

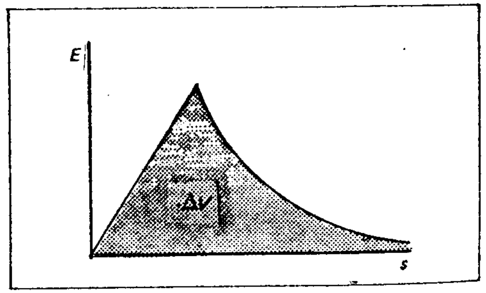



En la gráfica del módulo del campo eléctrico en función de la posición, el *área* encerrada por la gráfica entre dos posiciones representa, con el signo cambiado la variación del potencial eléctrico entre esas posiciones.

$$E \, ds = -dV$$

$$\int E \, ds = -\Delta V \qquad (4\text{-}17)$$

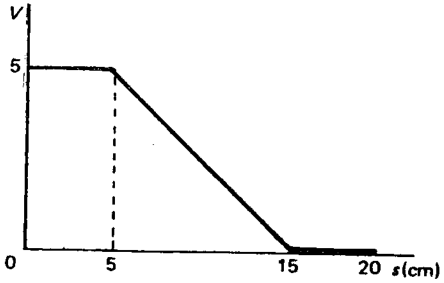
*Figura 4.19.* El área encerrada en la gráfica $E$ $s$, representa, con el signo cambiado, la variación del potencial.



**EJEMPLO 6**

*Considere dos placas paralelas muy grandes, con cargas opuestas distribuidas con la misma densidad.*

*La gráfica siguiente muestra el potencial eléctrico en función de la distancia a una de las placas. Dibuje la gráfica correspondiente de la intensidad del campo eléctrico en función de la distancia a las placas.*

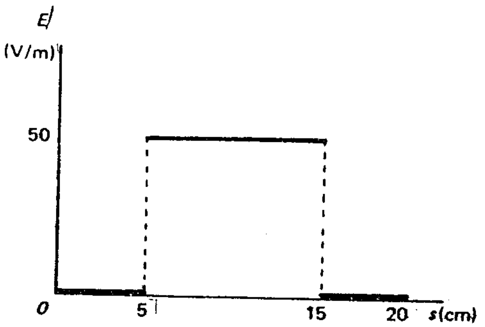



El valor del campo eléctrico viene dado por la pendiente con el signo cambiado en la gráfica anterior.

Entre $s = 0$ y $s = 5$ la pendiente es nula. Entonces $E = 0$
Entre $s = 5$ y $s = 15$ la pendiente es constante y vale:

$$\frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{-5}{0{,}10} = -50 \text{ V/m}$$

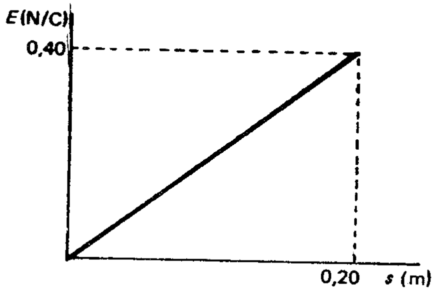
El valor del campo eléctrico en esa zona es +50 V/m. Entre $s = 15$ y $s = 20$ la pendiente es nula. Entonces $E = 0$.
La gráfica correspondiente es:




La gráfica anterior describe el campo eléctrico debido a las dos placas que, como ya se vio en la página 35, es nulo en la zona exterior a las placas y tiene un valor constante en la zona entre las placas. El campo eléctrico allí, es perpendicular a las placas y apunta hacia la de menor potencial.

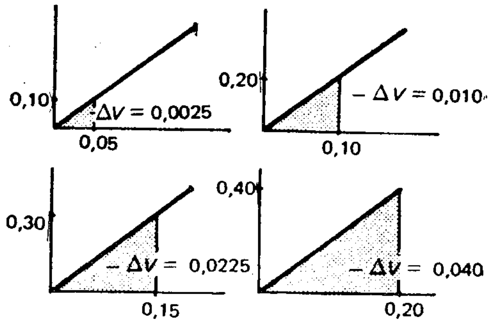
**EJEMPLO 7**

*La intensidad del campo eléctrico en función de la distancia al centro de una esfera maciza no conductora, cargada uniformemente, de radio $R = 0{,}20$ m, varía de acuerdo a la gráfica siguiente.*



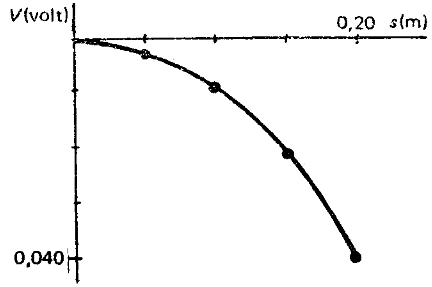

*Dibuje la gráfica correspondiente del potencial eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera suponiendo $V = 0$ en el centro de la esfera.*

El área encerrada en la gráfica anterior representa la variación del potencial con el signo cambiado.




Se calculan las diferencias del potencial entre distintas posiciones y, recordando que en el origen el potencial es nulo, se representan los valores hallados en la gráfica.



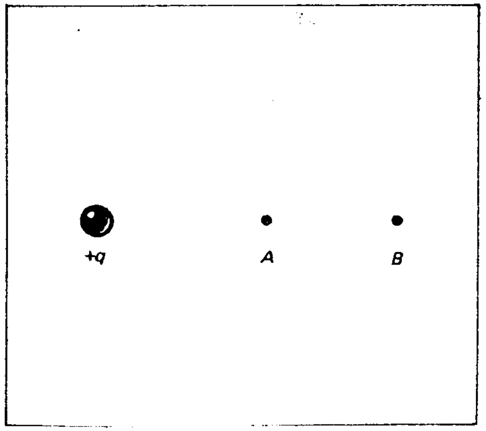



La gráfica $V - s$ es una parábola cuya tangente en el origen es horizontal, ya que la pendiente en la gráfica $V - s$ está relacionada con el módulo del campo eléctrico, y éste en el origen es nulo.

## 4.8 ENERGIA POTENCIAL ELECTRICA

Cuando una carga de prueba $q_0$ se desplaza en el campo eléctrico creado por una carga positiva $+q$, entre el punto $A$ y el punto $B$ (figura 4.20), el campo eléctrico realiza un trabajo

*Figura 4.20.* Cuando una carga de prueba $+q_0$, se desplaza libremente entre el punto $A$ y el punto $B$, aumenta la energía cinética y disminuye la energía potencial eléctrica del sistema.




$T_{AB}$ sobre ella. La energía cinética de la carga de prueba $q_0$ aumenta, ¿de dónde procede esa energía? Empleando la ley de conservación de la energía, puede considerarse que esa energía estaba almacenada en el campo eléctrico en forma de *energía potencial eléctrica* del sistema. Cuando las dos cargas (que se repelen), se dejan libres, se alejan ganando energía cinética a expensas de una disminución de la energía potencial eléctrica del sistema. La energía potencial eléctrica liberada está relacionada con el trabajo realizado por la fuerza electrostática sobre la carga de prueba. Cuando la carga pasa del punto $A$ al punto $B$, ese trabajo es:

$$\frac{T_{AB}}{q_0} = V_A - V_B$$

$$T_{AB} = q_0 V_A - q_0 V_B$$

$$T_{AB} = -(q_0 V_B - q_0 V_A)$$

El primer miembro de la expresión anterior es el trabajo realizado por la fuerza eléctrica y el segundo es la variación de la *energía potencial eléctrica*, llamando energía potencial eléctrica ($U$) al producto $q_0 V$. La energía potencial inicial es $U_A = q_0 V_A$ y la energía potencial final es $U_B = q_0 V_B$

$$T_{AB} = -[U_B - U_A]$$

$$T_{AB} = -\Delta U \qquad (4\text{-}18)$$

El trabajo de las fuerzas electrostáticas, con el signo cambiado, es igual a la variación de la energía potencial eléctrica del sistema.

Suponga que la carga de prueba pasa por el punto $A$ con determinada energía cinética, dirigiéndose libremente hacia la carga $q$. A medida que se acerca a ella va disminuyendo su energía cinética hasta detenerse en algún punto; el trabajo de las fuerzas electrostáticas sobre la carga $q_0$ en este desplazamiento es negativo (la carga pierde energía cinética). Entonces la variación de la energía potencial es positiva, y por lo tanto la energía potencial final será mayor que la inicial. Después, cuando la carga de prueba sea repelida por la carga $q$ y se dirija hacia el punto $A$ aumentando su velocidad y su energía cinética, el trabajo eléctrico será positivo lo que implica una variación negativa de la energía potencial eléctrica o sea una disminución de la misma.

Una situación análoga a la descripta anteriormente, es la que ocurre en el campo gravitatorio cuando se tira una piedra hacia arriba con cierta velocidad inicial. En el viaje hacia arriba, la energía cinética de la piedra disminuye debido al trabajo negativo de la fuerza gravitatoria, por otra parte ese trabajo negativo implica una variación positiva de la energía potencial gravitatoria del sistema piedra-tierra. En el viaje de regreso la piedra aumenta su energía cinética debido al trabajo positivo de la fuerza gravitatoria, ese trabajo implica una variación negativa de la energía potencial gravitatoria del sistema piedra-tierra. El modelo gravitatorio se diferencia del modelo eléctrico en que las fuerzas gravitatorias son siempre de atracción mientras que las fuerzas eléctricas pueden ser de atracción o repulsión.

Si el punto de referencia $P$ se ubica en el infinito, y a la energía potencial eléctrica allí se le asigna valor nulo, $U_\infty = 0$, se obtiene:

$$T_{A\,\infty} = -(U_\infty - U_A)$$

$$T_{A\,\infty} = U_A = q_0 V_A$$

como $V_A = \dfrac{kq}{r}$

$$U_A = k\,\frac{q\,q_0}{r} \qquad (4\text{-}19)$$

Esta expresión indica la energía potencial eléctrica que posee el sistema de cargas $q$, $q_0$ cuando se encuentran separadas a una distancia $r$; y corresponde al trabajo que realiza la fuerza del



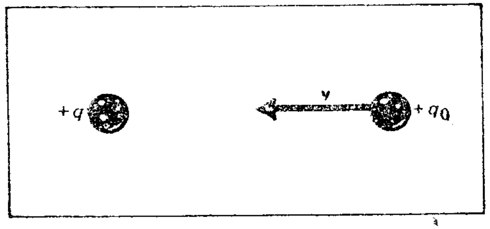



*Figura 4.21.* Cuando la carga de prueba se acerca a $q$ se va frenando. Disminuye su energía cinética y aumenta su energía potencial.

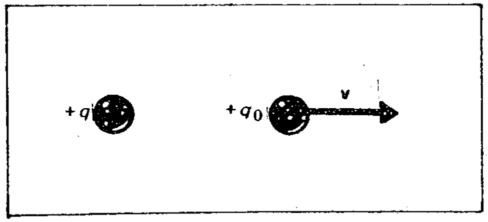
campo sobre la carga $q_0$ cuando ésta se desplaza desde el punto $A$ hasta el infinito. Para traer la carga $q_0$ desde el infinito hasta ese punto $A$, se debió hacer un trabajo contra el campo, de igual valor. Si las dos cargas son positivas o negativas a la vez, la energía potencial es positiva, y será negativa cuando una de las cargas sea positiva y la otra negativa. Cuando las dos cargas son del mismo signo se repelen y para acercarlas es necesario realizar un trabajo positivo desde el exterior, quedando energía almacenada en el campo. Cuando las cargas son de signos contrarios se atraen y al acercarlas el campo pierde energía, para separarlas es necesario realizar un trabajo positivo desde el exterior.

El *potencial eléctrico* en un punto puede considerarse como la *energía potencial eléctrica por unidad de carga*

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad (4\text{-}20)$$

Mientras que el potencial eléctrico es una propiedad del espacio debida a la carga $q$ que lo produce, la energía potencial $U$ está relacionada, además, con la carga $q_0$ que se coloque en el punto. Ambas magnitudes son *escalares*.

*Figura 4.22.* Cuando la carga de prueba se aleja de $q$ aumenta su velocidad. Aumenta su energía cinética disminuyendo su energía potencial.




## ENERGIA DE FORMACION

Para formar un sistema de cargas cualquiera, un agente exterior debe realizar trabajo ya que las cargas interactúan entre sí según la ley de Coulomb. Ese trabajo es igual a la variación de la energía potencial que experimenta el sistema cuando las cargas son trasladadas desde el infinito, donde se supone se encuentran en reposo, hasta sus posiciones definitivas. El trabajo es independiente del orden en que se trasladen las cargas. En efecto, si se considera un sistema constituido por dos cargas $q_1$ y $q_2$, el trabajo para trasladar la primera carga a su posición es nulo, y el trabajo para trasladar la segunda carga desde el infinito a su posición es igual al producto de esa carga por el potencial del punto. Dependiendo de la carga que se traslada en segundo término, ese trabajo es

$$T = q_1 V_2 \quad \text{o} \quad T = q_2 V_1$$

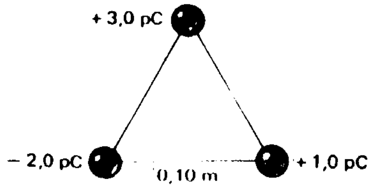
pero en ambos casos queda

$$T = k\,\frac{q_1\,q_2}{r} \qquad (4\text{-}21)$$

Lo anterior puede generalizarse a un sistema de muchas cargas. La energía de ese sistema es la suma de los trabajos necesarios para trasladar cada carga desde el infinito hasta la posición donde se ubicará. En la práctica se calcula por separado la energía potencial para cada par de cargas y después se suman algebraicamente.

### EJEMPLO 8

*Tres cargas se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. Calcular la energía potencial eléctrica del sistema.*




Se debe calcular la energía de cada par de cargas y después sumar:

$$U = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,1}$$

$$U = \frac{k\,q_1\,q_2}{r_{1,2}} + \frac{k\,q_2\,q_3}{r_{2,3}} + \frac{k\,q_3\,q_1}{r_{3,1}}$$

$$U = \frac{k\,(3{,}0\times10^{-12})\,(-2{,}0\times10^{-12})}{0{,}10} + \frac{k\,(-2{,}0\times10^{-12})\,(1{,}0\times10^{-12})}{0{,}10} + \frac{k\,(1{,}0\times10^{-12})\,(3{,}0\times10^{-12})}{0{,}10} =$$

$$U = \frac{(9{,}0\times10^{9})(-5{,}0\times10^{-24})}{0{,}10} = -4{,}5\times10^{-13}\ \text{J}$$

El signo negativo en el resultado de la energía potencial significa que el trabajo realizado por el agente exterior en la formación de este sistema fue negativo y por lo tanto debe realizarse un trabajo positivo $+4{,}5\times10^{-13}$ J para deshacerlo.

## ELECTRONVOLT

Cuando los valores numéricos de la energía son muy pequeños, como en el ejemplo anterior o a escala atómica y nuclear, se trabaja con otra unidad de energía, el *electronvolt* sustituyendo al joule.

*El electronvolt es el cambio de energía que experimenta un electrón cuando es sometido a una diferencia de potencial de 1 V.*

La expresión para la energía potencial es $U = q\,V$. Si se utiliza coulomb para la carga $q$ y volt para el potencial $V$ se obtiene la unidad de energía del Sistema Internacional, el joule. Si en cambio, se utiliza como unidad de carga, la carga del electrón $e$, se obtiene el electronvolt como unidad de energía. Recordando que la carga del electrón expresada en coulomb es $1\ e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, se puede encontrar la relación entre el electronvolt y el joule.

$$U = q\,V$$

$$1\ \text{eV} = (1e)\,.\,(1\text{V})$$

$$1\ \text{eV} = (1{,}6 \times 10^{-19}\text{C})\,.\,(1\text{V}) = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

$$1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

**EJEMPLO 9**

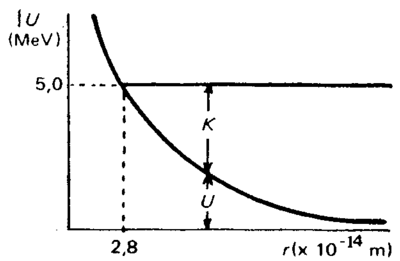
*Una partícula alfa con 5,0 MeV de energía cinética, se dirige directamente hacia un núcleo de oro ($Z = 79$). Determine la distancia a la que se detendrá.*

Una partícula alfa es el núcleo de un átomo de helio (dos protones y dos neutrones).
Su masa es $m = 4\,m_p = (4)\,.\,(1{,}67 \times 10^{-27})$ kg
Su carga es $q = 2\,e = (2)\,.\,(1{,}60 \times 10^{-19})$ C
La energía de 5,0 MeV (5,0 megaelectrovonts es igual a 5,0 millones de electronvots) expresada en joule, es:

$$K = 5{,}0\ \text{MeV} = 5{,}0 \times 10^{6}\ \text{eV} =$$

$$= (5{,}0 \times 10^{6})\,.\,(1{,}6 \times 10^{-19}) =$$

$$K = 8{,}0 \times 10^{-13}\ \text{J}$$




Cuando la partícula alfa se acerca al núcleo disminuye su energía cinética y aumenta su energía potencial.

Cuando la partícula se detiene, toda esa energía se encuentra en forma de energía potencial del sistema formado por la partícula alfa y el núcleo de oro.

$$U = \frac{k\,q\,q'}{r} = 8{,}0 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

La distancia a la que se detiene la partícula alfa es:

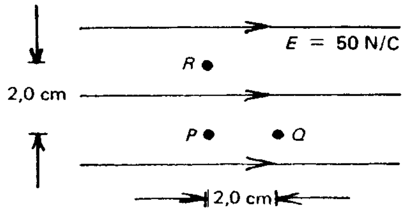
$$r = \frac{k\,q\,q'}{U} =$$

$$\frac{9{,}0 \times 10^{9})\ (79 \times 1{,}6 \times 10^{-19})\ (2 \times 1{,}6 \times 10^{-19})}{(8{,}0 \times 10^{-13})}$$

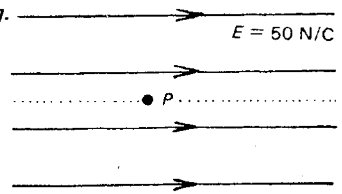
$$r = 2{,}8 \times 10^{-14}\ \text{m}$$

## 4. PROBLEMAS

1. Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico de la figura siguiente sobre un electrón, cuando éste pasa: *a)* del punto $P$ al punto $R$; *b)* del punto $P$ al punto $Q$.




2. Una carga positiva se desplaza a través del campo eléctrico de la figura. Cuando la carga pasa del punto $P$ al punto $Q$, el campo eléctrico realiza sobre ella un trabajo de 1,0 J. *a)* Ubique en el croquis el punto $Q$, sabiendo que se encuentra a 3,0 cm de $P$ sobre la recta punteada. *b)* Calcule la carga $q$.




3. Una carga de $+3{,}0 \times 10^{-12}$ C pasa desde una equipotencial de + 10 voltios a una equipotencial de + 4,0 voltios. Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga.

4. Por acción de un campo eléctrico, una carga de $-2{,}0 \times 10^{-5}$ C adquiere, al pasar de un punto $A$ a un punto $B$, una energía de $3{,}0 \times 10^{-4}$ J.
*a)* Determine la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$.
*b)* ¿Cuál de los dos puntos está a un potencial más elevado?

5. Un campo eléctrico uniforme es paralelo al eje $x$, apuntando en el sentido de las $x$ negativas y su módulo es $E = 50$ N/C. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos del eje $x$, ubicados en $x = -3{,}0$ cm y $x = +5{,}0$ cm.?

6. Calcule el potencial eléctrico en los puntos $R$ y $Q$ del problema 1 si el potencial en $P$ es $V = 20$ voltios.

7. El potencial eléctrico en un punto $A$ es 70 V y en otro punto $B$ es 20 V. Un electrón pasa del punto $A$ al punto $B$ acelerando por acción del campo eléctrico. Determine la energía cinética del electrón en el punto $B$, si en el punto $A$ tenía 200 eV.

8. El potencial eléctrico en el punto $A$ es 500 V y en el punto $B$ es 200 V. Se coloca una partícula cargada negativamente, sin velocidad inicial en el punto medio del segmento determinado por esos puntos. Describa el movimiento que adquiere la partícula.

9. Un electrón se mueve en un campo eléctrico uniforme. Pasa por el punto $A$ con $v = 2{,}0 \times 10^{5}$ m/s y por el punto $B$ con $v = 8{,}0 \times 10^{5}$ m/s. Determine $V_A - V_B$.

10. Una esfera conductora de 10 cm de radio tiene una carga total de + 15 $\mu$C. ¿Cuál es el trabajo que se debe realizar para llevar una carga de + 2,0 $\mu$C desde el centro de esa esfera hasta un punto que se encuentra a 10 cm de la superficie de la esfera?

11. Considere una esfera conductora hueca de 10 cm de radio, cargada con + 15 pC. Calcule la diferencia de potencial entre un punto de la superficie y el centro de la esfera.

12. Una esfera no conductora de radio 15 cm, tiene una carga de + 25 $\mu$C distribuida uniformemente. Calcular el trabajo que se debe realizar para llevar una carga de 1,0 C desde la superficie de la esfera hasta el centro.

13. En un punto ubicado a 0,20 cm del centro de una carga puntual positiva, el potencial eléctrico es 5,4 V. ¿Cuál es el potencial eléctrico creado por esa misma carga a 1,8 cm del centro?

14. Calcule el potencial eléctrico en un punto ubicado a 9,0 cm de una carga puntual de $2{,}0 \times 10^{-9}$ C.

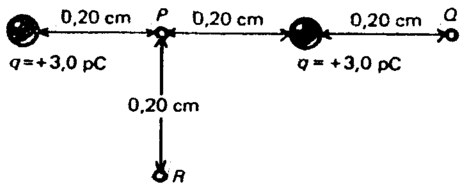
15. Una carga puntual $q = +5{,}0$ nC se encuentra en el origen; dos puntos, $A$ y $B$, están sobre el eje $x$, en $x = +5{,}0$ cm y $x' = -2{,}0$ cm. Determine la diferencia de potencial $V_A - V_B$.

16. Calcule el trabajo que debe realizar un agente exterior para llevar un electrón, sin acelerarlo, desde una posición a $0{,}5 \times 10^{-10}$ m de un protón, hasta el infinito.

17. Considere un punto $A$, a 0,10 m de una carga puntual de $5{,}0 \times 10^{-6}$ C, y un punto $B$ a 0,50 m de la misma carga. Determine el trabajo que realiza el campo eléctrico cuando una carga de $-3{,}0 \times 10^{-9}$ C pasa desde el punto $A$ hasta el punto $B$.

18. Una carga puntual, $q = +5{,}0 \times 10^{-8}$ C, se encuentra en el origen. Determine la diferencia de potencial entre un punto $A$ ubicado sobre el eje $x$, en $x = +5{,}0$ mm; y un punto $B$ ubicado sobre el eje $y$, en $y = +2{,}0$ mm.

19. Considere las dos cargas puntuales de la figura. *a)* Calcule el campo $E$ en los puntos $P$, $Q$ y $R$. *b)* Calcule el potencial eléctrico en los mismos puntos.




20. Dos cargas puntuales de + 5,0 pC y − 10 pC están separadas 0,40 cm. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio del segmento determinado por esas cargas.

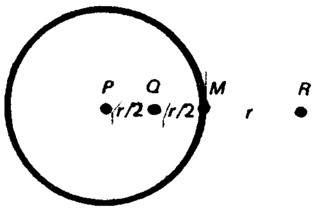
21. Dos cargas de + 2,0 pC y − 1,0 pC se encuentran separadas 6,0 cm. Determine los puntos, ubicados sobre la recta determinada por las cargas, donde el potencial eléctrico es nulo.

22. Determine el potencial de un dipolo eléctrico, en un punto $P$, del eje situado a una distancia $r$ muy grande del centro

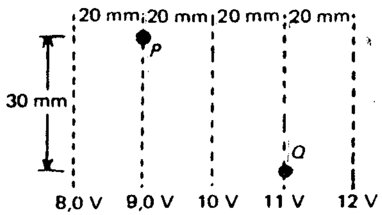
23. Dos cargas $q$ iguales, se encuentran separadas una distancia $d$. Dibuje una gráfica aproximada del potencial eléctrico en función de la distancia a una de las cargas.

24. Calcule el potencial eléctrico en el centro de un anillo delgado de 2,0 cm de radio, con una carga de + 5,0 nC distribuida uniformemente.

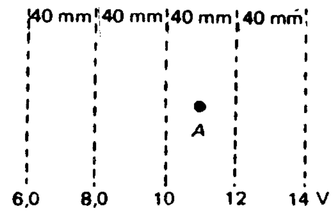
25. Una esfera conductora está cargada positivamente. En el punto $M$, el campo eléctrico tiene módulo $E$ y el potencial es $V$. Determine el módulo del campo eléctrico y el potencial en los puntos $P$, $Q$ y $R$.




26. Las siguientes equipotenciales describen un campo eléctrico. Calcule: *a)* el campo eléctrico en $P$ y $Q$. *b)* el trabajo realizado por el campo, cuando una carga de + 5,0 pC pasa desde $P$ a $Q$.



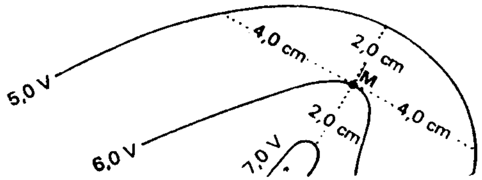

27. Las equipotenciales de la figura describen el campo $E$, en una zona del espacio. Calcule la fuerza eléctrica que actuaría sobre un electrón colocado en el punto $A$.




28. La diferencia de potencial entre dos superficies equipotenciales situadas en las proximidades de una lámina infinita de carga es 3,0 V. Si esas equipotenciales están separadas $1{,}5 \times 10^{-3}$ m ¿cuál es la densidad de carga superficial de la lámina?

29. Una lámina infinita está cargada con una densidad superficial $\sigma = +5{,}0 \times 10^{-6}$ C/m$^2$. Un punto $A$ se encuentra a 2,0 mm de la lámina, y un punto $B$ se encuentra a 6,0 mm de ella. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos $A$ y $B$.

30. La figura muestra la descripción de un campo eléctrico mediante equipotenciales. Determine el vector que representa el campo eléctrico en el punto $M$.






31. Considere el campo eléctrico de una carga puntual $q = +6{,}0$ pC. *a)* Dibuje en un esquema las superficies equipotenciales correspondientes a $V = 1{,}0$ ; $V = 2{,}0$ y $V = 3{,}0$ voltios. *b)* Calcule la intensidad del campo eléctrico correspondiente a los puntos que pertenecen a las superficies equipotenciales.

32. Un cascarón metálico, esférico y descargado tiene un radio interno de 5,0 cm y un radio externo de 10,0 cm. En el centro del cascarón existe una carga puntual, $q = +6{,}0$ pC. Determine el valor del potencial eléctrico en un punto que dista 7,0 cm del centro del cascarón.

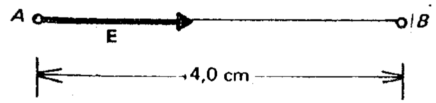
33. La diferencia de potencial entre dos placas paralelas separadas 0,50 cm es 12 V. Determine el valor del campo eléctrico entre ellas.

34. Dos placas paralelas muy grandes, separadas 2,0 mm, están cargadas con densidades de carga $\sigma = +5{,}0$ pC/m$^2$ y $\sigma' = -5{,}0$ pC/m$^2$. Calcule la diferencia de potencial entre ellas.

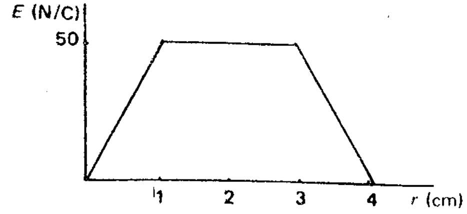
35. En una región del espacio, el campo eléctrico es uniforme y sus componentes son $E_x = 0$, $E_y = -15$ N/C, $E_z = 0$. Calcule: *a)* el gradiente de potencial en esa zona. *b)* la diferencia de potencial entre el punto ($x = 0$, $y = 0$) y el punto ($x = +4{,}0$ cm, $y = -3{,}0$ cm.).

36. Calcule la diferencia de potencial entre dos placas paralelas de 200 cm$^2$ de área separadas 2,0 mm, y cuyas cargas son +5,0 pC y − 10 pC respectivamente.

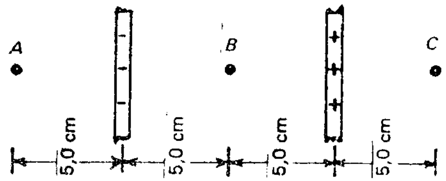
37. El campo eléctrico entre dos puntos $A$ y $B$ tiene la dirección y sentido que se indica en la figura siguiente:




La gráfica adjunta representa la intensidad del campo $E$ en función de la distancia $r$ al punto $A$. Dibuje la gráfica que representa el potencial eléctrico en función de la distancia $r$ al punto $A$.




38. Se tienen dos láminas infinitas cargadas uniformemente con densidades superficiales de + 53,1 pC/m$^2$ y − 17,7 pC/m$^2$ *a)* Calcule el campo eléctrico en $A$, $B$ y $C$. *b)* Dibuje la gráfica $E(x)$. *c)* Dibuje la gráfica $V(x)$, suponiendo $V = 0$ en $A$.




39. Considere una lámina delgada de dimensiones mucho mayores que $r$, y cargada positivamente. Compare las intensidades del campo eléctrico y del potencial eléctrico en los puntos $M$ y $N$, que se encuentran a una distancia $r$ y $2r$ de la lámina.

40. Considere una esfera no conductora de 15 cm de radio con una densidad de carga volumétrica uniforme de + 53,1 pC/m$^3$ *a)* Calcule el campo eléctrico en el punto $A$ (a 5,0 cm del centro de la esfera). *b)* Dibuje la gráfica del campo en función de la distancia al centro de la esfera. *c)* Calcule la diferencia de potencial entre el centro y el punto $A$.

41. Un electrón pasa de un punto $M$ a un punto $N$. Calcule la variación de la energía potencial eléctrica si $V_M = 200$ V y $V_N = 500$ V. ¿Gana o pierde energía eléctrica este electrón?

42. ¿Qué energía poseen los electrones emitidos por una célula fotoeléctrica, si son detenidos por una diferencia de potencial de 3,0 V.

43. ¿Con qué diferencia de potencial se puede detener un electrón que se desplaza a $2{,}0 \times 10^6$ m/s.

44. Un protón se acelera con una diferencia de potencial de 1,0 V. Determine la energía que adquiere el protón.

45. Un electrón, inicialmente en reposo, es acelerado al ser sometido a una diferencia de potencial de 5,0 V. Calcule: *a)* la energía que adquiere el electrón; *b)* la velocidad final.

46. Determinar la diferencia de potencial que permite reducir a la mitad la velocidad de un protón que inicialmente se mueve con $v = 3{,}0 \times 10^5$ m/s.

47. Un electrón inicialmente en reposo adquiere, en una región donde existe campo eléctrico, una velocidad vertical y hacia abajo. Después de recorrer 2,0 mm su energía cinética es 100 eV. Determine las características del campo eléctrico.

48. La diferencia de potencial entre dos puntos *A* y *B* que distan 10 cm, es 20 V. Un electrón colocado en reposo en *A*, es acelerado hacia *B*. *a)* ¿qué energía cinética gana el electrón al pasar del punto *A* al punto *B*? *b)* ¿qué aceleración adquiere el electrón?

49. Un electrón que se mueve con $v = 8{,}0 \times 10^5$ m/s, entra a través de un pequeño orificio, en una zona donde existe un campo eléctrico uniforme creado por dos placas paralelas. Las dos placas están separadas 5,0 cm y entre ellas existe una diferencia de potencial de 4,0 V. Calcule la energía con que el electrón sale del dispositivo.

50. Un protón entra en el campo eléctrico de las dos placas anteriores con una velocidad $v = 1{,}5 \times 10^4$ m/s ¿qué distancia recorre antes de detenerse?

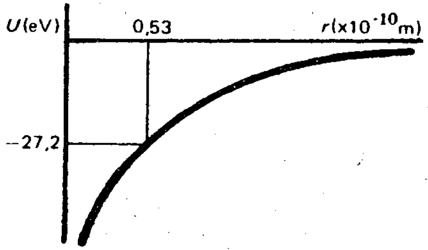
51. Un electrón se encuentra a $0{,}5 \times 10^{-10}$ m de un protón ¿qué velocidad se le debe comunicar para permitirle escapar de la influencia del protón?

52. Un electrón con una energía de 2,0 eV se aproxima a una superficie muy grande cargada uniformemente con $\sigma = +5{,}0 \times 10^{-10}$ C/m$^2$. ¿Qué distancia recorre el electrón antes de detenerse?

53. Calcule la energía eléctrica de dos cargas puntuales de + 5,0 pC separadas 3,0 cm. ¿Qué ocurre con esa energía si se duplica la separación entre las cargas?

54. En los vértices de un cuadrado de 2,0 cm de arista, se colocan cuatro cargas de + 3,0 nC cada una. Determine la energía potencial eléctrica de esa configuración.

55. La gráfica corresponde a la energía potencial en función de la distancia entre un electrón y el núcleo en el átomo de Hidrógeno. El radio de la órbita fundamental del electrón es $0{,}5 \times 10^{-10}$ m y la energía total − 13,6 eV. Calcule la energía cinética del electrón en esa órbita.






# 5. CAPACITORES



## 5.1 CAPACITANCIA

Diferentes conductores cargados con la misma carga eléctrica adquieren distintos potenciales. Esta es una propiedad física que permite caracterizar a los conductores y que se llama *capacitancia.*

El potencial *V* de un conductor aislado, es proporcional a la carga, ya que al aumentar ésta, aumenta el campo E y por lo tanto aumenta en la misma proporción el trabajo que se realiza para desplazar una carga entre el infinito y el conductor.

$$q = CV \qquad (5\ 1)$$

**El coeficiente de proporcionalidad *C* (capacitancia) es independiente de la carga o del potencial *V*; depende de la forma y del tamaño del conductor.**

**En el Sistema Internacional la capacitancia se expresa en *coulomb por volt* que se denomina *farad (F)* en honor a Michael FARADAY**

En la práctica el farad es una unidad muy grande, por lo que resulta más adecuado utilizar el *microfarad* ($10^{-6}$ F) o el *picofarad* ($10^{-12}$ F).

## 5.2 CAPACITORES

Un *capacitor* es un dispositivo formado por dos conductores (llamados *armaduras*) con cargas de igual magnitud pero signo contrario. La capacitancia del capacitor (antes se los llamaba

*Figura 5.1.* Símbolo del capacitor.