Triángulos

Teorema de Pitágoras

Un triángulo es rectángulo (fig.1) si tiene un ángulo recto. Sabemos que la suma de las medidas de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$ 180°), como el ángulo recto vale 90° ($\hat{A} =$ 90°), los otros dos deben sumar 90° ($\hat{B} + \hat{C} =$ 90°).

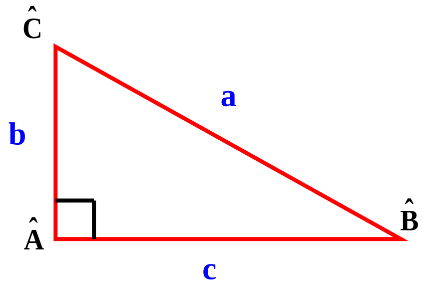


Fig.1

Al lado opuesto al ángulo recto (lado **a**) se le denomina hipotenusa y a los otros dos lados (**b** y **c**), que son los que forman el ángulo recto, se les denominan catetos. La hipotenusa siempre tiene mayor longitud que cada unos de los catetos.
Existe una relación matemática entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo que se conoce con el nombre de **Teorema de Pitágoras**.

La suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa. Esto se expresa mediante la siguiente ecuación $a^2 = b^2 + c^2$, siendo "a" la hipotenusa y "b" y "c" los catetos de un triángulo rectángulo.

- Conociendo los dos catetos, podemos calcular la medida de la hipotenusa $\Rightarrow$ $\mathbf{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$
- Conociendo la hipotenusa y uno de los catetos, podemos calcular la medida del otro cateto $\Rightarrow$ $\mathbf{b = \sqrt{a^2 - c^2}}$ **o** $\mathbf{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$

Ejemplo 1

Calcule la longitud de la diagonal "SU" del rectángulo RSTU(fig.2), conociendo que el lado RS mide 8,0cm y el RU 6,0 cm..
SU es la hipotenusa del triángulo rectángulo URS, donde RS = 8,0cm y RU = 6,0 cm son los catetos. Utilizando el Teorema de Pitágoras calculamos la hipotenusa SU = $\sqrt{6{,}0\text{cm}^2 + 8{,}0\text{cm}^2}$ = 10cm $\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{SU =10cm}}$

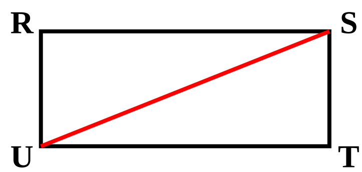


Fig.2

Trigonometría de Triángulos Rectángulos

Tomando un ángulo α (no el recto) como referencia, podemos hacer una distinción entre los catetos. Denominamos cateto opuesto al ángulo α, al lado que no está formando dicho ángulo y cateto adyacente al ángulo α, al que junto con la hipotenusa forma dicho ángulo. Por ejemplo en el triángulo de la fig., si consideramos el ángulo $\hat{\mathbf{B}}$, el cateto b es el opuesto y el cateto c es el adyacente.

La trigonometría relaciona las medidas de los lados de un triángulo con la medida de los ángulos. Para un triángulo rectángulo las ecuaciones son:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{C.Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{coseno } \alpha = \frac{\text{C.Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{C.Opuesto}}{\text{C.Adyacente}}$$

- Seno se abrevia **"sen"**
- Coseno se abrevia **"cos"**
- Tangente se abrevia **"tan"**
- Para hallar los valores del seno, coseno o tangente de un ángulo, se usa una calculadora científica.

Utilizando las ecuaciones anteriores podemos hallar las medidas de todos los ángulos y lados de un triángulo rectángulo si conocemos:

- Un ángulo y uno de los lados (Ejemplo 2).
- Dos de sus lados (Ejemplo 3).

Ejemplo 2

En el triángulo de la fig. 3 se conoce el ángulo $\hat{C}$ = 30° y el lado c = 20 cm. Calcule la medida de la hipotenusa.

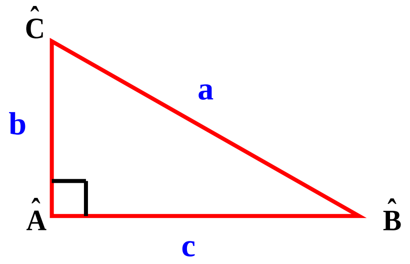


fig. 3

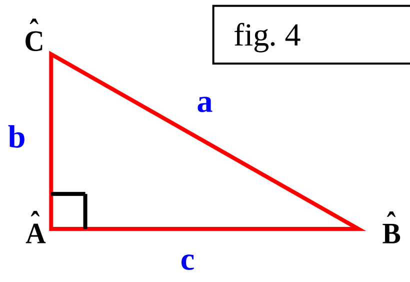
Conocemos un ángulo y su cateto opuesto. Para hallar la hipotenusa debemos utilizar la ecuación que relacione la hipotenusa con el cateto conocido.

sen $\hat{C} = \frac{\text{C.Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a} \Rightarrow$ sen 30° $= \frac{20\text{cm}}{a}$. De esta ecuación despejamos "a" $\Rightarrow a = \frac{20\text{cm}}{\text{sen}30} = \frac{\mathbf{20cm}}{\mathbf{0,5}} = 40 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a = 40cm}}$

Ejemplo 3

En el triángulo rectángulo de la fig.4 se conoce el cateto b = 2,0m y el c = 4,0m. Calcule el ángulo $\hat{B}$

fig. 4



El lado b es el cateto opuesto al angulo $\hat{B}$ y el lado c es el adyacente, la ecuación trigonomtrica que relaciona los dos catetos con el ángulo es la tangente $\Rightarrow$ tan $\hat{B} = \frac{\text{C.Opuesto}}{\text{C.Adyacente}} = \frac{b}{c} \Rightarrow$ tan $\hat{B} = \frac{\mathbf{2,0m}}{\mathbf{4,0m}}$ = 0,5 Ahora conocemos la tangente del ángulo y debemos averiguar a que ángulo corresponde. Para ello utilizamos la función matemática arcotangente, que en la calculadora aparece como "tan $^{-1}$"

En la mayoría de las calculadoras esta función está en la misma tecla que la tangente, pero previamente debemos oprimir la tecla shift o inv . Siguiendo este procedimiento obtenemos que $\hat{B}$ = 26,6°.

Trigonometría de Triángulos no Rectángulos

En los triángulos no rectángulos no tiene sentido hablar de hipotenusa y catetos, ya que no existe ángulo recto. Por esta razón las ecuaciones de seno, coseno y tangente antes vistas, no son aplicables[1]. Pero tenemos dos teoremas que nos permitan resolver este tipo de triángulos, denominados Teorema del Seno y Teorema del Coseno.

Teorema del Seno

Dado un triángulo ABC, la razón (cociente) entre el seno de uno de sus ángulos y la medida de su lado opuesto es constante.

$$\frac{\mathrm{sen}\hat{A}}{a} = \frac{\mathrm{sen}\hat{B}}{b} = \frac{\mathrm{sen}\hat{C}}{c}$$

Teorema del Coseno

Dado un triángulo, nos permite calcular la medida de un lado conociendo los otros dos y el ángulo comprendido entre ellos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$

[1] Recordemos que la relación entre los ángulos ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$) sigue cumpliéndose