Prof. María Caputi Zunini

DIVISIBILIDAD EN ℕ

1) Se quieren empacar huevos en paquetes de media docena. ¿Cuántos envases son necesarios para empacar 238 huevos?

DIVISIÓN ENTERA[1]: Dados dos naturales a y b (b$\neq$ 0) llamaremos cociente q y resto r a dos números naturales que verifican:

1. a = b.q +r
2. r$<$b

Esquema de la división entera: $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$

TEOREMA 1: EXISTENCIA del cociente y del resto de dividir a entre b ($a \in \mathbb{N}\ y\ b \in \mathbb{N}^*$)
TEOREMA 2: UNICIDAD del cociente y del resto de dividir a entre b ($a \in \mathbb{N}\ y\ b \in \mathbb{N}^*$)

[1] Si r=0 la división se denomina división exacta.

2) Completar de todas las maneras posibles las siguientes divisiones indicando casos de imposibilidad:

38	
	5

	4
2	

	5
	16

3	20

24	
	5

3) Hallar todos los números naturales a y r que cumplen con la siguiente división entera:

a	4
r	17

4) Hallar todos los naturales que divididos entre 17 dan un resto igual al cuadrado del cociente. Hallar además cociente y resto para cada división.

5) ¿Qué le ocurre al cociente en una división exacta si:
1. el dividendo se multiplica por 7 y el divisor permanece igual?
2. el dividendo se divide entre 3 y el divisor permanece igual?
3. el dividendo permanece igual y el divisor se multiplica por 5?
4. el dividendo permanece igual y el divisor se divide entre 3?
5. el dividendo se multiplica por 3 y el divisor se divide entre 2?
6. el dividendo se multiplica por 6 y el divisor se multiplica por 3?
7. el dividendo se divide entre 2 y el divisor se divide entre 8?
8. el dividendo se divide entre 3 y el divisor se multiplica por 5?
9. se agrega al dividendo una cantidad igual al divisor?
10. se le resta al dividendo una cantidad igual al divisor?
11. el cociente y el divisor intercambian sus funciones?

6) ¿Qué modificaciones simultáneas pueden hacerse a las cantidades del dividendo y del divisor de una división exacta para que el cociente: **1.** permanezca igual? **2.** se duplique? **3.** se reduzca a su tercera parte?

7) ¿Qué le puede haber ocurrido al dividendo de una división exacta si:
1. el divisor ha permanecido igual y el cociente se ha reducido a su mitad?
2. el divisor ha permanecido igual y el cociente se ha triplicado?
3. el divisor se ha duplicado y el cociente se ha cuadruplicado?
4. el divisor se ha reducido a su mitad y el cociente se ha sextuplicado?
5. el divisor se ha duplicado y el cociente se ha reducido a su mitad?
6. el divisor y el cociente se han reducido a su mitad?

8) ¿Qué le puede haber ocurrido al divisor de una división exacta si:
1. el dividendo ha permanecido igual y el cociente se ha reducido a su mitad?
2. el dividendo ha permanecido igual y el cociente se ha triplicado?
3. el dividendo se ha cuadruplicado y el cociente se ha duplicado?
4. el dividendo se ha reducido a su sexta parte y el cociente se ha duplicado?
5. el dividendo se ha duplicado y el cociente se ha reducido a su mitad?
6. el dividendo y el cociente se han reducido a su tercera parte?

9) Si en una división inexacta el dividendo se duplica y el divisor permanece igual, ¿qué le ocurre al cociente? ¿Y al resto?

TEOREMA 3: siendo a, b, r, q y n naturales $b \neq 0, n \neq 0$

H) $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r & q \end{array}$ T) $\begin{array}{c|c} an & bn \\ \hline rn & q \end{array}$

Demostración a cargo del estudiante

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

10) En un salón se quieren acomodar los bancos en filas de igual cantidad de bancos. Si hay 36 bancos ¿De qué maneras puede realizarse?

DIVISOR: Dados dos naturales **a** y **b** (a≠ 0), diremos que **a** es divisor de **b** o que **a** divide a **b** y notaremos: a|b

$$a|b \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ } y \text{ } \exists q \in \mathbb{N} \text{ } tal \text{ } que \text{ } b = a.q$$

Ejemplo: 4|12 pues 12=4.3, pero 7 no divide a 12

Observaciones:

- 1 es divisor de todo número natural
- Todo número natural distinto de 0 es divisor de sí mismo.
- El cero no es divisor de ningún número natural.

MÚLTIPLO: Dados dos naturales **a** y **b,** diremos que **b** es múltiplo de **a** y notaremos: b=$\dot{a}$

$$b = \dot{a} \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N} \text{ } tal \text{ } que \text{ } b = a.q$$

Ejemplo: 12=$\dot{4}$ pues 12=4.3

Observaciones:

- 4|12 sí y solo si 12=$\dot{4}$
- 0=$\dot{0}$ pero 0 no divide a 0
- 0=$\dot{a}$ para todo a natural
- Utilizaremos como expresiones equivalentes las de: "b es múltiplo de a" y "b es divisible por a", <u>cuando a no es nulo.</u>

TEOREMA 4: Sean a, b y c naturales (c≠ 0)

H) c|a
c|b
a≥b

T) i) c|(a+b)
ii) c| (a – b)

Si un número natural es divisor de otros, también lo es de su suma y de su diferencia (cuando esta existe).

O, en lenguaje de múltiplos:

Si varios naturales son múltiplos de a, serán también múltiplos de a las sumas y las diferencias posibles entre ellos.

Demostración:

Por H) c|a $\overset{def}{\Longrightarrow} c|a \Leftrightarrow c \neq 0 \text{ } y \text{ } \exists q_1 \in \mathbb{N} \text{ } tal \text{ } que \text{ } a = c.q_1$

Por H) c|b $\overset{def}{\Longrightarrow} c|b \Leftrightarrow c \neq 0 \text{ } y \text{ } \exists q_2 \in \mathbb{N} \text{ } tal \text{ } que \text{ } b = c.q_2$

a+b =

a – b =

Observación: Del teorema anterior y de las definiciones de múltiplo y de divisor podemos concluir que:

H) $a = \dot{c}$ T) i) $a + b = \dot{c}$

$b = \dot{c}$ ii) $a - b = \dot{c}$

$a \geq b$

11) a) Encuentra, si es posible, un número que sea múltiplo de 3 y divisor de 45.
   b) Encuentra, si es posible, un número que sea múltiplo de 3 y divisor de 46.
   c) ¿Qué condición deben cumplir dos números naturales a y b, para que sea posible encontrar un número que sea múltiplo de a y divisor de b? Justifica.
12) Si hoy es lunes ¿Qué día será dentro de 100 días? ¿y dentro de 500 días?
13) A) Demuestra que si un número natural es divisor de otro, también es divisor de todos sus múltiplos.
   B) Demuestra que para todo natural distinto de cero sus divisores son menores o iguales que él.

Criterios de divisibilidad

Para averiguar si un número es múltiplo de otro podemos: aplicar la definición (o una consecuencia de ella: dividirlos y ver si existe el cociente exacto). Pero, en determinados casos, existen ciertos criterios que nos permiten saber si un número es múltiplo de otro, sin realizar explícitamente lo anterior. A continuación aparecen algunos de ellos.

Criterio del 2, del 5 y del 10

Un número es múltiplo de 2, si y solo si su última cifra es múltiplo de 2.
Un número es múltiplo de 5, si y solo si su última cifra es múltiplo de 5.
Un número es múltiplo de 10, si y solo si su última cifra es múltiplo de 10.

Criterio del 3 y del 9

Un número es múltiplo de 3, si y solo si la suma de todas las cifras que lo forman es múltiplo de 3.
Un número es múltiplo de 9, si y solo si la suma de todas las cifras que lo forman es múltiplo de 9.

Criterio del 4, del 20, del 25, del 50 y del 100

Un número es múltiplo de 4, si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
Un número es múltiplo de 20, si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 20.
Un número es múltiplo de 25, si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 25.
Un número es múltiplo de 50, si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 50.
Un número es múltiplo de 100, si y solo si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 100.

Criterio del 6

Un número es múltiplo de 6, si y solo si es múltiplo de 2 y de 3 a la vez.

14) Justificando los criterios...
   a) Probar que un número de 2 cifras es par si su última cifra es par.
   b) Probar que un número de 2 cifras es múltiplo de 5 si su última cifra es múltiplo de 5.
   c) Probar que un número de 3 cifras es múltiplo de 10 si su última cifra es 0.
   d) Probar que un número de 3 cifras es múltiplo de 3 si la suma de todas las cifras que lo forman es múltiplo de 3.
   e) Probar que un número de 3 cifras es múltiplo de 9 si la suma de todas las cifras que lo forman es múltiplo de 9.
   f) Probar que un número de 3 cifras es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
   g) Probar que un número 4 cifras es múltiplo de 100 si sus dos últimas cifras son 0.
15) Escribe dos números distintos, formados por las mismas cifras, todas distintas. Calcula su diferencia. Repite el proceso con varios números de 2 y 3 cifras. ¿De qué número es siempre múltiplo esa diferencia? Justifica.
16) Completa cada guión con una cifra, para que el número 9_1_ sea múltiplo de 9 y 5, pero no de 2.
17) Completa cada guión con una cifra, para que el número _74_ sea múltiplo de 12 y de 15.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS NÚMEROS NATURALES

DEFINICIÓN: Sea a un natural definimos el conjunto de los divisores de a: $d(a) = \{n \in \mathbb{N} \; tal \; que \; n|a\}$.

19) Hallar $d(10) =$
$d(280) =$
$d(11) =$
$d(1) =$
$d(0) =$

TEOREMA 5: EXISTENCIA, UNICIDAD Y DEFINICIÓN DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE a y b naturales.

Dados dos naturales a y b

Consideraremos el conjunto $d(a) \cap d(b)$

Caso 1: $a \neq 0$, $b \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} d(a) \cap d(b) \subset \mathbb{N} \\ d(a) \cap d(b) \neq \emptyset \text{ pues } 1 \in d(a) \cap d(b) \\ d(a) \cap d(b) \text{ está acotado sup. por ejemplo por a.} \end{array}\right\} \underset{....}{\Rightarrow} d(a) \cap d(b) \; tiene \; máximo \; y \; es \; único$$

Al máximo de $d(a) \cap d(b)$ lo llamaremos MÁXIMO COMÚN DIVISOR de a y b. Lo notaremos MCD(a, b) o D(a, b).

Caso 2: a$= 0$ y b$\neq 0$

Como a=0 $\xrightarrow{\text{def } d(a)}$ $d(a) = \mathbb{N}^*$

$d(a) \cap d(b) = \mathbb{N}^* \cap d(b) = d(b)$

El máximo de $d(b)$ es b. Entonces, MCD (0, b) = b

Caso 3: a$= 0$ y b$= 0$

Como a=0 $\xrightarrow{\text{def } d(a)}$ $d(a) = \mathbb{N}^*$

Como b=0 $\xrightarrow{\text{def } d(b)}$ $d(b) = \mathbb{N}^*$

$d(a) \cap d(b) = \mathbb{N}^* \cap \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$

No existe el máximo de $d(a) \cap d(b)$. Entonces, $\nexists MCD(0,0)$

Observaciones:

- MCD(a,b) | a y MCD(a,b) | b *El MCD divide a a y b*
- Si c|a y c|b entonces c| MCD(a,b) *El MCD es divisible por cualquier divisor de a y b*

20) Hallar MCD(12,18)

d(12)={ }

d(18)={ }

$d(12) \cap d(18) = \{ \quad \}$ MCD(12,18)=

21) Algunos números tienen una cantidad par de divisores y otros una cantidad impar. Investiga cómo son los números que tienen una cantidad impar de divisores.
22) Encuentra algunos números cuyos divisores son todos pares, excepto el 1. ¿Qué característica común tienen todos ellos?

TEOREMA 6:

H) $\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$

T) $d(a) \cap d(b) = d(b) \cap d(r)$

Demostración

En la tesis aparece una igualdad entre conjuntos. Para probarla debemos probar que:

i) Dado $x \in d(a) \cap d(b) \Rightarrow x \in d(b) \cap d(r)$
ii) Dado $y \in d(b) \cap d(r) \Rightarrow y \in d(a) \cap d(b)$

23)

a) Hallar el cociente y resto de la división entera de 144 entre 80.

b) Hallar d(144)={ }

d(80)={ }

d(64)={ }

$d(144) \cap d(80) = \{ \qquad \}$

$d(80) \cap d(64) = \{ \qquad \}$

c) Hallar MCD(144,80) y MCD(80,64)

COROLARIO:

H) $\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$ T) MCD(a, b)=MCD (b, r)

Observación: *Los divisores comunes a dos números son los mismos que los del par formado por el menor de ellos y el resto de la división del mayor por el menor.*

TEOREMA 7: ALGORITMO DE EUCLIDES

El algoritmo de Euclides es un procedimiento que nos permite encontrar los divisores comunes a dos naturales y en particular el MCD.

24) Aplicando el algoritmo de Euclides hallar el A) MCD(6684, 2700) B)MCD(432, 2772) C) MCD(1814,320)

TEOREMA 8:

H) MCD(a, b)= D $n \neq 0$

T) MCD (an, bn)= Dn

Demostración a cargo del estudiante.[2]

TEOREMA 9:

H) MCD(a, b)= D
n|a y n|b

T) MCD(a: n, b: n)=D: n

Demostración a cargo del estudiante.[3]

[2] Sugerencia: aplicar el esquema de Euclides para calcular MCD(an, bn) y el Teorema 7

[3] Sugerencia: aplicar el teorema 8

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ: Dados a y b naturales, a y b son primos entre sí ⇔ MCD(a, b)=1

TEOREMA 10:

$$\text{MCD}(a, b)=D \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = D.a' \\ b = D.b' \\ \text{MCD}(a', b') = 1 \end{cases}$$

Teorema DIRECTO (⟹)

H) MCD(a, b)=D T)i) $a = D.a'$

ii) $b = D.b'$

iii) $\text{MCD}(a', b') = 1$

Demostración.

$$\text{Por H) MCD}(a, b)=D \Longrightarrow \begin{cases} D|a \overset{def}{\Longrightarrow} \exists a' \in \mathbb{N}\ tal\ que\ a = D.a' \Longrightarrow T)i) \\ \qquad\qquad y \\ D|b \overset{def}{\Longrightarrow} \exists b' \in \mathbb{N}\ tal\ que\ b = D.b' \Longrightarrow T)\ ii) \end{cases}$$

Por H) MCD(a, b)=D $\overset{\dots\dots}{\Rightarrow}$ MCD (Da´, Db´)=D $\overset{\dots\dots}{\Rightarrow}$ MCD ((Da´: D), (Db´: D))= D: D $\overset{\dots\dots}{\Rightarrow}$ MCD (a´, b´)=1⟹T) iii)

Teorema RECÍPROCO (⟸)

$$\text{H)} \begin{cases} a = D.a' \\ b = D.b' \\ \text{MCD}(a', b') = 1 \end{cases} \qquad \text{T) MCD}(a, b)=D$$

Demostración

Por H) $\text{MCD}(a', b') = 1 \overset{Teo\ 8}{\Longrightarrow} \dots\dots$

Observación: Los cocientes de dividir dos números por su MCD, son primos entre sí.

25) Considerando el siguiente esquema de Euclides en el cual se conocen los cocientes, hallar los números naturales a y b, todos los restos y MCD(a,b). Sabiendo además que a+b=1500.

	1	3	1	2
a	b	r_1	r_2	r_3
			0	

26) Hallar los naturales a y b que verifiquen las condiciones que se detallan en cada caso:

i) a+b=276 MCD(a,b)=23 a>b

ii) a.b=1470 MCD(a,b)=7 a>b

iii) $a^2 + b = 51$ MCD(a, b)=3

iv) $a + b + a' + b' = 21$ MCD(a,b) >1 a>b

MÍNIMO COMÚN MULTIPLO DE DOS NÚMEROS NATURALES

DEFINICIÓN: Sea a un natural definimos el conjunto de los múltiplos no nulos de a: $m(a) = \{n \in \mathbb{N}^*\ tal\ que\ n = \dot{a}\ \}$

TEOREMA 11: EXISTENCIA, UNICIDAD Y DEFINICIÓN DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO de a y b naturales.

Consideremos el conjunto $m(a) \cap\ m(b)$

- $m(a) \cap\ m(b) \subset \mathbb{N}$

Caso 1: $a \neq 0\ y\ \ b \neq 0$

- $m(a) \cap\ m(b) \neq \emptyset$

Porque:

$$\left.\begin{array}{l} a.b = \dot{a} \ \text{ y } \ a.b = \dot{b} \\ \text{Dado que } \ a \neq 0\ y\ \ b \neq 0 \ \overset{\because}{\Rightarrow} a.b \neq 0 \end{array}\right\} \quad \overset{\because}{\Rightarrow}\ ab \in\ m(a) \cap\ m(b) \Longrightarrow m(a) \cap\ m(b) \neq \emptyset$$

$m(a) \cap\ m(b) \subset \mathbb{N}$ y $m(a) \cap\ m(b) \neq \emptyset$ por Teorema de Buena ordenación $m(a) \cap\ m(b)$ tiene mínimo que llamaremos MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO y escribiremos m.c.m.(a,b) o mcm(a,b) o m(a,b)

Caso 2: $a = 0\ o\ \ b = 0$

Si $a = 0\ o\ \ b = 0 \xRightarrow{def.\ de\, m(a)} m(a)\ o\ m(b) es\ vacío \Longrightarrow\ m(a) \cap\ m(b) = \emptyset \Longrightarrow\ \nexists\, m.c.m\ (a,b)$

Observación:

- Los múltiplos comunes a dos números naturales son múltiplos de su m.c.m.
- El mínimo común múltiplo de dos naturales no nulos es el mínimo del conjunto de múltiplos comunes, exceptuando el 0.

TEOREMA 12: TEOREMA DE EUCLIDES

Sean a,b y c naturales $c \neq 0$

H) c|a.b T)c|b
MCD(c, a)=1

Si un natural divide a un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, divide al otro.

Demostración

Por H) MCD(c, a)=1 $\xRightarrow[Teo\ 8]{si\ b\neq 0}$ MCD(cb, ab)=b

Por H) c|a.b, además c|cb por definición de divisor.

Como c es divisor de ab y es divisor de cb, entonces c es divisor del MCD(cb, ab).

Entonces, c|cb y c|ab ⟹c|MCD(cb,ab)

Como MCD(cb, ab)=b ⟹ c|b

27) Si a y b son primos entre sí, ¿cuáles son M.C.D(a,b) y m.c.m.(a,b)?

28) Completa y justifica: Si a es múltiplo de b, entonces el MCD (a,b)=............y el mcm(a,b)=............

NÚMEROS PRIMOS Y DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

NÚMERO PRIMO

Dado un número natural p, p≥2, diremos que p es primo sí y sólo si, $d(p) = \{1, p\}$

Observación: Un número primo es primo con todos los naturales que no sean sus múltiplos.
Demostración. Si p es un número primo, solo tiene los divisores 1 y p. Por consiguiente, esos son los únicos divisores que puede tener en común con cualquier otro natural n. Hay así dos posibilidades:
MCD (p, n)=1 o MCD (p, n)=p. La última equivale a: $n = \dot{p}$

CRIBA DE ERATÓSTENES

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

NÚMERO COMPUESTO

Un número natural n es compuesto si es distinto de 0 y admite más de dos divisores.

Observación: Los naturales quedan entonces clasificados de la siguiente manera:
- el 0, que es divisible por cualquier natural, excepto por sí mismo.
- el 1, que solo es divisible por sí mismo.
- los primos, que admiten sólo los dos divisores denominados triviales, y
- los compuestos, que admiten además de los triviales otros divisores.

$$si\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \begin{cases} n = 0 \quad d(0) = \mathbb{N}^* \\ n = 1 \quad d(1) = \{1\} \\ n \geq 2 \ \ es\ primo \quad d(n) = \{1; n\} \\ n > 2 \ \ es\ compuesto\ \#d(n) > 2 \end{cases}$$

TEOREMA 13:

Dados a, b y p naturales

H) p es primo T) p|a o p|b

p|a.b

Si un número primo divide a un producto de dos factores, divide, por lo menos, a uno de ellos.

Demostración.

Si p|b ⟹ T)

Si p no divide a b $\overset{....}{\Rightarrow}$ MCD (p, b)=1
Por H) p|a.b $\Big\}$ $\xRightarrow{Teorema\ de\ Euclides}$ ....

Observaciones:

- El teorema es válido para cualquier número de factores:
  Si un número primo divide a un producto, divide, por lo menos, a uno de los factores.
- Si un número primo divide al producto de varios factores primos, entonces, es uno de ellos.

TEOREMA 14:

Todo número compuesto se puede expresar de forma única como producto de factores primos. [4]

Observación: Como en la descomposición factorial pueda haber factores primos repetidos, se suele agruparlos en forma de potencia y se escriben ordenando las bases en forma creciente. Llegamos así a:

$$Sea\ n \in \mathbb{N}, n\ compuesto,$$
$$n = {p_1}^{\alpha}.{p_2}^{\beta} \ldots {p_m}^{\gamma}$$

$$con\ p_i\ primos\ \ \forall i \in \mathbb{N}\ tal\ que\ \ 1 \leq i \leq m\ \ y\ p_i \neq p_j\ si\ i \neq j$$
$$con\ \alpha, \beta, \ldots, \gamma\ naturales, mayores\ o\ iguales\ que\ 1$$

29) Escribe la descomposición en factores primos de 150. Escribe todos los divisores de 150
30) Solo hay un número con un único divisor: el 1. Los números primos tienen exactamente 2 divisores. ¿Cómo son los números que tienen exactamente 3 divisores?
31) Siendo m=$2^3 .5^2.7.11^2$, decir, sin efectuar operaciones, cuáles son divisores de m.
    a) 2.5 b) $2^4.5.11$ c) $2^3.5^2 .7$ d) 1 e)11 f) $2^3.5^2.7.11^2$ g) $2^2.5$ h) 2.3.5 i) 2.7 j)2.7^2

Ejemplo:

La descomposición en factores primos de 12 es $2^2.3$

La descomposición en factores primos de 90 es $2.3^2.5$

El mcm(12, 90)=$2^2.3^2.5$

El MCD(12,90)=2.3

Hallar 12.90

[4] Lo admitiremos sin demostración. El lector curioso puede hacerse de ella en la bibliografía que aparece al final de este material

TEOREMA 15: EL PRODUCTO DE DOS NATURALES ES IGUAL AL PRODUCTO DE SU **MCD** POR SU **mcm.**

H) Sean a y b naturales compuestos T) mcm(a,b). MCD(a,b)=a.b

Demostración.
Siendo a y b los naturales considerados
Los representaremos de la forma:
$a = p_1{}^{\alpha}.p_2{}^{\beta} \ldots p_m{}^{\gamma}$ y $b = p_1{}^{\alpha'}.p_2{}^{\beta'} \ldots p_m{}^{\gamma'}$ con las mismas bases para ambos. Para conseguir esto, si una base figura en un desarrollo y no en el otro, la introduciremos en este con exponente cero.
Consideremos ahora los pares $\alpha\ y\ \alpha'$.
Llamaremos $\underline{\alpha}$ al menor y $\overline{\alpha}$ al mayor de los dos. (Si son iguales será $\underline{\alpha} = \overline{\alpha} = \alpha = \alpha'$)
Observamos que $\underline{\alpha} + \overline{\alpha} = \alpha + \alpha'$ y que podemos realizar un procedimiento análogo con el resto de los exponentes.
Entonces, el mcm(a,b)= $p_1{}^{\overline{\alpha}}.p_2{}^{\overline{\beta}} \ldots p_m{}^{\overline{\gamma}}$ y el MCD(a, b)=$p_1{}^{\underline{\alpha}}.p_2{}^{\underline{\beta}} \ldots p_m{}^{\underline{\gamma}}$

mcm(a, b). MCD(a,b)= $p_1{}^{\overline{\alpha}+\underline{\alpha}}.p_2{}^{\overline{\beta}+\underline{\beta}} \ldots p_m{}^{\overline{\gamma}+\underline{\gamma}}$
y, por consiguiente, coincide con el producto a.b

32) Hallar el mcm (48, 360) y el MCD(48, 360)
33) Sea el natural N= $3^{\alpha}5^{\beta}13$ con α y β distintos de cero. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Fundamentar.
   i. Tres de los divisores de N son primos.
   ii. 169 es divisor de N.
   iii. 65 es divisor de N.
   iv. $3^{\alpha}5^{\beta}13^2$ es múltiplo de N.
   v. D(N, 28)= 1.

TEOREMA 16: INFINITUD DE LOS NÚMERO PRIMOS

Demostración por reducción al absurdo.
Supongamos que el conjunto de los número primos es P=$\{2; 3; 5; 7; 11; \ldots; p\}$
Existe p el mayor de los números primos.
Formemos entonces el natural n=2.3.5.7… .p +1, nótese que el primer sumando es el producto de todos los primos.
Es claro que n es mayor que p.
Si n es primo ya tenemos una contradicción.
Si no lo es, admite divisores primos, pero estos no pueden estar en el conjunto anterior, pues ninguno de ellos divide a n (todos dan resto 1).
Entonces, el conjunto P no contiene a todos los primos, contradiciendo lo supuesto. Resulta así que admitir la existencia de un último primo es absurdo.

NÚMERO DE DIVISORES

Queremos calcular el número de divisores de un número natural compuesto expresado en su DPFP. Por ejemplo, sea $2^3.5^2.3^4$

Calculemos los divisores de:

d(2^3)={ $1, 2, 2^2, 2^3$ } entonces, 2^3 tiene 3+1=4 divisores.

d(5^2)={ $1, 5, 5^2$ } entonces, 5^2 tiene 2+1=3 divisores.

		d(5^2)		
	.	1	5	5^2
	1	1	5	5^2
d(2^3)	2	2	2.5	2.5^2
	2^2	2^2	$2^2.5$	$2^2.5^2$
	2^3	2^3	$2^3.5$	$2^3.5^2$

Por lo tanto, d($2^3.5^2$)={ $1, 2, 2^2, 2^3, 5, 5^2, 2.5, 2^2.5, 2^2.5^2, 2^3.5, 2^3.5^2$ } entonces, $2^3.5^2$ tiene (3+1).(2+1)=4.3=12 divisores.

En conclusión, el número de divisores de $2^3.5^2$ es igual al producto del número de divisores de 2^3 por el número de divisores de 5^2.

En consecuencia, el número de divisores de $2^3.5^2.3^4$ es (3+1).(2+1).(4+1)=4.3.5=60.

Generalizando:

- La cantidad de divisores de un número $n = p_1{}^{\alpha}.p_2{}^{\beta}\dots p_m{}^{\gamma}$ puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$v(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1)\dots(\gamma + 1)$$

Suma de todos los divisores de un número[5]

- La suma de todos los divisores de un número n puede calcularse usando la siguiente fórmula:

$$s(n) = \frac{p_1{}^{\alpha+1} - 1}{p_1 - 1}.\frac{p_2{}^{\beta+1} - 1}{p_2 - 1}\dots\frac{p_m{}^{\gamma+1} - 1}{p_m - 1}$$

[5] Lo admitiremos sin demostración. El lector curioso puede hacerse de ella en la bibliografía que aparece al final de este material.

Algunas aplicaciones a la criptografía

34) SISTEMA CÉSAR

El sistema César se remonta a la antigua Roma, y se supone que era utilizado por César al enviar instrucciones en sus campañas militares.

El sistema conlleva los siguientes pasos:

- Se representa las letras del alfabeto con un número del 0 a 26 (españolizando, contamos la letra "ñ"), así a la "a" le corresponde el 0, a la "b" el 1, a la "c" el 2 etc., hasta llegar a la "z" a la que corresponde el 26.
- Se suma un número fijo *k* a los valores obtenidos para cada letra, y luego tomar el resto de dividir entre 27. (Si no nos pasamos de 26, no es necesario dividir, ¿por qué?).
- Se transforma cada número obtenido en la letra correspondiente.

Si por ejemplo $k = 3$, entonces a la "a" le corresponde el 0+3 = 3 que es la letra "d". Para calcular el correspondiente de "y" 25+3 = 28. Al dividir 28 entre 27 se obtiene resto 1. El correspondiente de "y" es "b" ya que el 1 está asociado con esa letra.

1. El mensaje "nos ganaron otra vez" se vería como "prv jdpdurp rwud yhc". Compruébalo.

2. Si la clave elegida es 7, encripta el siguiente mensaje (sin considerar los tildes): "Volverán las oscuras golondrinas de tu balcón sus nidos a colgar".

3. El siguiente es un mensaje encriptado con clave 7. Descífralo. "ñvrh".

35) SISTEMA AFIN

El sistema afín es un poco más complejo que el César, y puede verse como una generalización de este.

El sistema conlleva los siguientes pasos:

- Se representan las letras del alfabeto, el espacio en blanco, el punto y el signo de interrogación con los siguientes números:

  A$\mapsto$ 0, B$\mapsto$ 1, C$\mapsto$ 2, D$\mapsto$ 3, E$\mapsto$ 4, F$\mapsto$ 5, G$\mapsto$ 6, H$\mapsto$ 7, I$\mapsto$ 8, J$\mapsto$ 9,
  K$\mapsto$ 10, L$\mapsto$ 11, M$\mapsto$ 12, N$\mapsto$ 13, Ñ$\mapsto$ 14, O$\mapsto$ 15, P$\mapsto$ 16, Q$\mapsto$ 17, R$\mapsto$ 18,
  S$\mapsto$ 19, T$\mapsto$ 20, U$\mapsto$ 21, V$\mapsto$ 22, W$\mapsto$ 23, X$\mapsto$ 24, Y$\mapsto$ 25, Z$\mapsto$ 26,
  $\square\mapsto$ 27, $\cdot\mapsto$ 28, ?$\mapsto$ 29, 0$\mapsto$ 30, 1$\mapsto$ 31, 2$\mapsto$ 32, 3$\mapsto$ 33, 4$\mapsto$ 34,
  5$\mapsto$ 35, 6$\mapsto$ 36, 7$\mapsto$ 37, 8$\mapsto$ 38, 9$\mapsto$ 39
- A cada letra se le hace corresponder el número x que le corresponde según el punto anterior, luego al número x se lo multiplica por a y se le suma el número b obteniendo un número y=ax+b. Finalmente, se considera el resto de dividir el número "y" entre 40 y se asigna la letra correspondiente (Si no nos pasamos de 40, no es necesario dividir, ¿por qué?). La pareja de números a y b es la clave de encriptar.
- Se transforma cada número obtenido en la letra o símbolo correspondiente.

Por ejemplo, si a=13 y b=18 a "C" le corresponde x=2 como y=13x+18, entonces y=13.2+18=44. 44 dividido 40 tiene resto 4, finalmente a 4 le asignamos la letra "E".

1. Si la clave es a=3 y b=2 encriptar el mensaje "Todos nosotros sabemos algo. Todos nosotros ignoramos algo. Por eso, aprendemos siempre. Paulo Freire."
2. Descifrar el mensaje cifrado con la clave a=13, b=18 dado por "1010"

36) Sea N= $2^{\alpha}5^{\beta}$, hallar N sabiendo que admite 15 divisores y que $\alpha > \beta$.

37) Hallar N = $2^{\alpha}5^{\beta}$ si admite 24 divisores y 85 es múltiplo de β.

38) Sea N= $2^{\alpha}5^{\beta}$, hallar N sabiendo que V_{5N}=16 y V_{3N}=24.

39) Sea N= $2^{\alpha}3^{\beta}C^{\lambda}$ se sabe que: α, β y γ son positivos, C es primo, V_N=48, N es múltiplo de 144, y S_N=20160.

40) Algunos pares de números tienen la propiedad de que la suma de los divisores de cada uno de ellos, excluyendo los propios números, es el otro número. A estos números se les llama números amigos. Verifica que 1184 y 1210 son amigos.

41) Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes números:
a) 252 y 700 b) 76 y 171 c) 429 y 117 d) 102 y 136 e) 143 y 221 f) 18 y 90 g) 165 y 104 h) 0 y 100
i) 20 y 77

42) Hallar dos números a y b tales que M.C.D(a,b) = 36 y m.c.m.(a,b) = 5148
43) Hallar dos números a y b tales que su suma sea 144 y M.C.D.(a,b) = 12.
44) Dados p = $2^3.5^8.7$ y q = $3^4.5^3.7^6$
    a) Hallar M.C.D(p,q) y m.c.m.(p,q)
    b) Escribir 3 divisores comunes a p y q.
    c) Escribir un número mayor que 100 y que sea primo con p.
45) Determina un par de números naturales que tengan el mismo M.C.D. y el mismo m.c.m. que 1470 y 126.
46) Un terreno rectangular de 50 m de largo y 15 m de ancho debe ser totalmente dividido en cuadrados iguales de la mayor área posible ¿cuál es el número de cuadrados que se obtienen?
47) Dos ómnibus A y B parten a las 5 de la mañana. El A emplea 30 minutos en hacer su recorrido y el B 45 minutos, ambos vuelven a salir en cuánto llegan. ¿A qué hora se encontrarán nuevamente en el punto de partida?
48) Un joyero tiene una bolsa con 500 perlas grises, 3850 perlas blancas y 5850 perlas negras. Usando todas las perlas, quiere fabricar collares uniformes (cada collar de un solo color) con el mismo número de perlas cada collar y de modo que sean lo más largos posible.
    a) ¿cuántas perlas contendrá cada collar? b) ¿cuántos collares logrará hacer?
49) Las piezas de un rompecabezas se guardan en una caja de 27cm de ancho, 36 cm de largo y 18 cm de altura. Dichas piezas son cubos iguales, construidos con el mayor lado posible de manera que llenen completamente la caja. Calcular la medida de la arista de cada pieza y el número de piezas.
50) Dos letreros luminosos se encienden con intermitencia de 42 y 54 segundos respectivamente. En determinado momento se encienden simultáneamente ¿cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a encenderse simultáneamente?
51) El día 3 de marzo parten del puerto de Colonia tres veleros. El primero hace lo mismo cada 12 días, el segundo cada 15 días y el tercero cada 28 días. ¿Cuándo volverán a coincidir nuevamente en la salida? ¿Cuántos viajes habrá hecho cada uno en ese período?
52) Se quiere alambrar un terreno rectangular de 12 metros de ancho y 20 metros de largo. Para esto se debe colocar el menor número de postes posible de modo que haya uno en cada esquina y estén separados una distancia constante entre uno y otro. ¿Cuál es esa distancia y cuántos postes se necesitan?
53) 1800 tornillos pesan tanto como 6930 tuercas. ¿Cuál es el menor número de tuercas y de tornillos para el cual las tuercas pesan igual que los tornillos?
54) Un enfermo debe tomar antibióticos cada 6 horas y un antialérgico cada 9 horas. Si comienza tomando ambos medicamentos a la vez ¿cuántas horas pasaran hasta que vuelva a tomarlos simultáneamente?
55) Hallar un número natural n que tiene 20 divisores, tal que $n = 3^{\alpha}.5^{\beta},\ \alpha > \beta\ ,\ n = \dot{25}$
56) Calcular el mcm(4356,1092)
57) Hallar los naturales a y b sabiendo que mcm(a,b)=372 y $\frac{2}{b} + \frac{3}{a} = \frac{1}{31}$
58) Hallar a y b naturales (a$>b$) en los siguientes casos:
    i) MCD(a,b)=20 mcm(a,b)=240
    ii) a+b=581 $\frac{mcm(a,b)}{MCD(a,b)} = 240$
59) Sean tres números a, b y c naturales tales que mcm(b,c)=$2^4.3.7$ MCD(a,c) es múltiplo de 6.
    i) Calcular b y c sabiendo que el número de divisores de b es 8 y que c≤49
    ii) Calcular a sabiendo que s(a)=60 y que v(a)=8
60) Dados a y b naturales
    i) Calcular s=a+b sabiendo que $a^2 + ab = \dot{7}$; D(a,7)=1 50≤s≤59
    ii) Hallar todas las parejas (a,b) que cumplen i y además MCD(a,b)=8, $8 < b < a$
61) Hallar a y b naturales tales que: a+b=43.MCD(a,b) (a - b) . MCD(a,b)=5508 y que a+b tiene 12 divisores y 3 factores primos.
62) Hallar los números naturales $a = 4^{\alpha}.5^{\beta}.6^{\gamma}$ $b = 2^{\alpha}.5^{\beta}.3^{\gamma}$ sabiendo que $(\beta + 1)|12$, $\beta \neq 0$; mcm(a,b) no es múltiplo de 9; v(a)-v(b)=16
63) Hallar tres naturales a, b y c sabiendo que a y c tiene 3 divisores primos; b tiene 2 divisores primos; v(a)=24 v(c)=12 MCD(a,b)=9 MCD(a,c)=30 mcm(a,b)= $2^3.3^3.5.7^2$ s(c)=372

Material preparado por las Profª. María Caputi y Alicia Alonso en base a los capítulos de DIVISIBILIDAD EN N de:
- Matemática II Bachillerato. 2º año diversificación científica. W. Fernández Val. Ed. Del Palacio. Montevideo. 2011
- Introducción al análisis matemático. Luis Osin. Ed. Kapelusz. Buenos Aires.1966
- Matemática 5º Tomo II. Editorial Fin de Siglo
- Materiales de la Prof. Teresita Carrión. IFD Canelones. 2014
- Apuntes de la Sala del Colegio del Sagrado Corazón.2002
- Apuntes del Curso Matemática II Colegio San Luis Pando 2015 de la Profesora María Caputi.
- Apuntes del Curso Matemática I del IFD de Pando 2016 de la Profesora María Caputi
- Apuntes del Curso de Criptografía del Dr. Vieitez. Salto. 2015.
-Apuntes del Curso Matemática II de Liceo n° 2 de Pando de la a Profesora Carmen Amorín.